



Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Meccanica ed Aeronautica

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Meccanica

Esercitazioni di
Meccanica Applicata alle Macchine

A.A. 2009/10

Docente

Prof. Nicola Pio Belfiore

Studente

Daniele Cortis

Indice

Esercitazione N.1	7
Esercitazione N.2	14
Esercitazione N.3	20
Esercitazione N.4	32
Esercitazione N.5	43
Esercitazione N.6	52
Esercitazione N.8	64
Esercitazione N.9	69
Esercitazione N.10	76
Esercitazione N.11	89
Esercitazione N.12	95
Esercitazione N.13	100
Esercitazione N.14	106

Esercitazione N.1

Analisi cinematica del primo ordine del manovellismo

In un manovellismo ordinario centrato risulta:

$r = 0.20$ m	raggio della manovella A_0A
$l = 0.50$ m	lunghezza della biella AB
$l_1 = 0.40$ m ed $l_2 = 0.30$ m	lunghezza delle aste BC e AC solidali alla biella
$n = 360$ giri/1'	numero di giri al minuto primo della manovella, rotante in senso antiorario con velocità angolare costante

Si rappresenti il manovellismo in una scala opportuna degli spazi, nella configurazione assunta dallo stesso in corrispondenza all'istante di tempo $t_1=1/72$ s, valutato a partire dal tempo $t_0=0$ s per il quale il sistema assume la *configurazione di punto morto esterno*.

Per l'istante t_1 si determini, mediante il metodo dei poli:

- la posizione del centro di rotazione istantanea della biella, nel suo moto relativo al telaio;
- la velocità dei punti B (piede di biella), C ed M , quest'ultimo posto nella mezzeria di AB ;
- la velocità angolare ω_3 della biella.

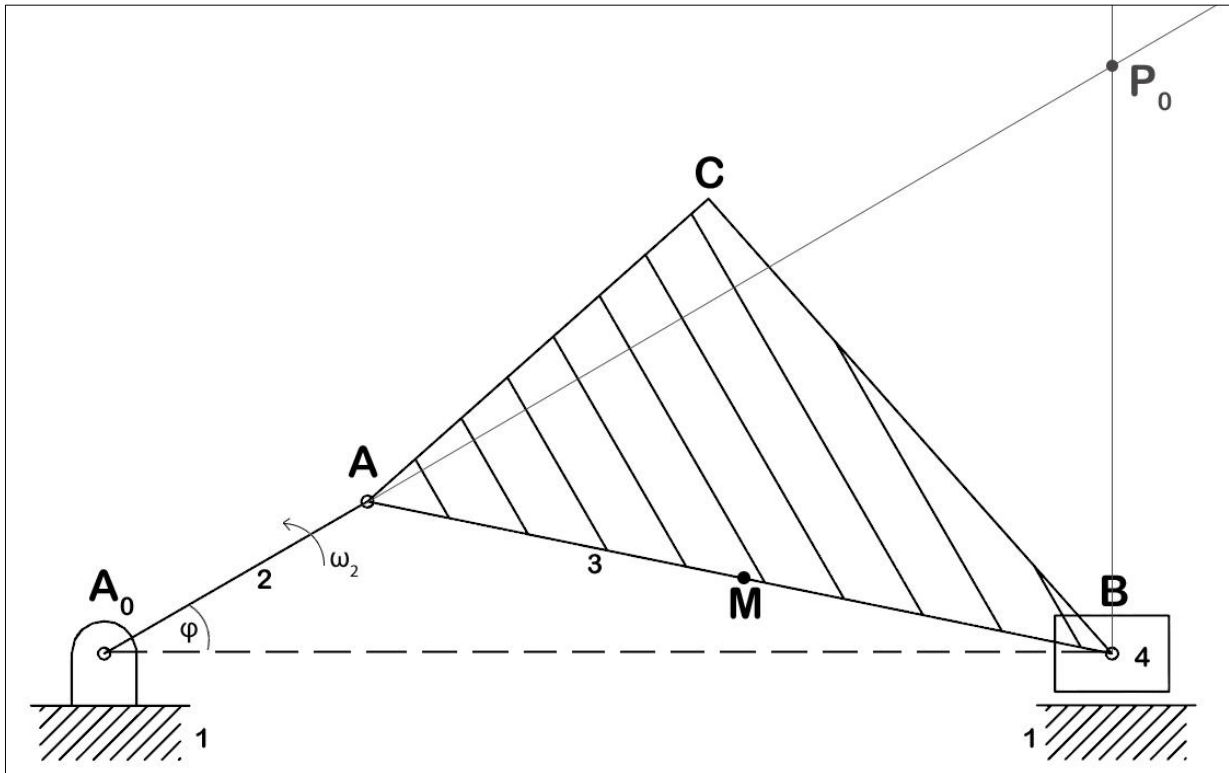
Si ripeta il calcolo delle velocità dei punti B , C ed M e della velocità angolare ω_3 usando il metodo dei diagrammi polari e si confrontino i risultati con quelli ricavati mediante il metodo dei poli.

Si traccino le polari del moto relativo biella-telaio, determinandone un conveniente numero di punti con il metodo del trasporto.

Si tracci, infine, la traiettoria del punto di biella C usando il metodo del trasporto per un adeguato numero di punti.

Metodo dei poli

Si determina la posizione del centro di rotazione istantaneo della biella P_0 , all'istante t_1 , nel suo moto relativo al telaio, come intersezione della retta A_0A con la normale all'asse di traslazione dello stantuffo per il punto B.



Supposto che:

$$\omega_2 = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 360}{60} = 37.7 \text{ rad/s}$$

$$\varphi = \omega_2 t_1 = 37.7 \cdot \frac{1}{72} = 0.5236 \text{ rad} \cong 30^\circ$$

Poiché la velocità del punto A appartiene sia al corpo 2 che al corpo 3, la velocità angolare della biella ω_3 si può calcolare come segue:

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \cdot A_0A = 37.7 \cdot 0.20 = 7.54 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \cdot A_0A = \omega_3 \cdot P_0A$$

da cui si ricava:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot A_0A}{P_0A} = \frac{7.54}{0.58} = 13 \text{ rad/s}$$

La velocità del punto B (piede di biella), C ed M, basandosi sulle proprietà dei campi di velocità sono pari a:

$$|\vec{v}_B| = \omega_3 \cdot P_0B = 13 \cdot 0.41 = 5.33 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_C| = \omega_3 \cdot P_0C = 13 \cdot 0.29 = 3.77 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_M| = \omega_3 \cdot P_0M = 13 \cdot 0.43 = 5.59 \text{ m/s}$$

Metodo dei diagrammi polari

La velocità del centro della cerniera A può essere calcolata conoscendo il valore della velocità angolare ω_2 della manovella mediante la relazione:

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \cdot A_0A = 37.7 \cdot 0.20 = 7.54 \text{ m/s}$$

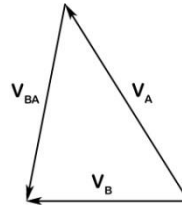
Si deduce in seguito la scala delle velocità σ_v dalla lunghezza del tratto l_{v_A} rappresentativo di \vec{v}_A :

$$\sigma_v = \frac{|\vec{v}_A|}{l_{v_A}} = \frac{7.54}{3} \cong 2.5$$

La risoluzione della seguente equazione vettoriale può essere effettuata considerando che a primo membro c'è solo un vettore \vec{v}_B , noto in direzione ma non in modulo, ed a secondo membro un vettore completamente noto \vec{v}_A , ed un vettore \vec{v}_{BA} , noto solo in direzione:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \omega_3 \times \vec{AB}$$

\vec{v}_B	=	\vec{v}_A	\vec{v}_{BA}
$\parallel \vec{A_0B}$	=	$\perp \vec{A_0A}$	$\perp \vec{BA}$
?	=	$\omega_2 \cdot A_0A$?



Si impone che la somma dei segmenti orientati rappresentativi (in modulo, direzione e verso) dei vettori \vec{v}_A e \vec{v}_{BA} sia uguale al segmento orientato rappresentativo del vettore \vec{v}_B :

I moduli di \vec{v}_B e \vec{v}_{BA} possono essere determinati moltiplicando le lunghezze dei rispettivi segmenti orientati, rilevate sul foglio, per la scala delle velocità σ_v .

$$|\vec{v}_{BA}| = l_{v_{BA}} \cdot \sigma_v = 2.6 \cdot 2.5 = 6.50 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_B| = l_{v_B} \cdot \sigma_v = 2.1 \cdot 2.5 = 5.25 \text{ m/s}$$

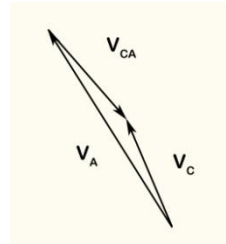
Il modulo della velocità angolare ω_3 della biella si può facilmente dedurre all'istante considerato attraverso:

$$\omega_3 = \frac{|\vec{v}_{BA}|}{|BA|} = \frac{6.5}{0.50} = 13 \text{ rad/s}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per gli altri punti C ed M solidali alla biella risulta:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = \vec{v}_A + \omega_3 \times \overline{AC}$$

\vec{v}_C	=	\vec{v}_A	\vec{v}_{CA}
?	=	$\perp \overline{A_0A}$	$\perp \overline{CA}$
?	=	$\omega_2 \cdot A_0A$	$\omega_3 \cdot CA$



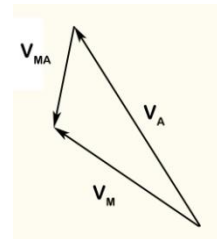
$$|\vec{v}_{CA}| = \omega_3 \cdot CA = 13 \cdot 0.30 = 3.90 \text{ m/s}$$

$$l_{v_{CA}} = \frac{|\vec{v}_{CA}|}{\sigma_v} = \frac{3.9}{2.5} = 1.56 \text{ cm}$$

$$|\vec{v}_C| = l_{v_C} \cdot \sigma_v = 1.5 \cdot 2.5 = 3.75 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} = \vec{v}_A + \omega_3 \times \overline{AM}$$

\vec{v}_M	=	\vec{v}_A	\vec{v}_{MA}
?	=	$\perp \overline{A_0A}$	$\perp \overline{MA}$
?	=	$\omega_2 \cdot A_0A$	$\omega_3 \cdot MA$



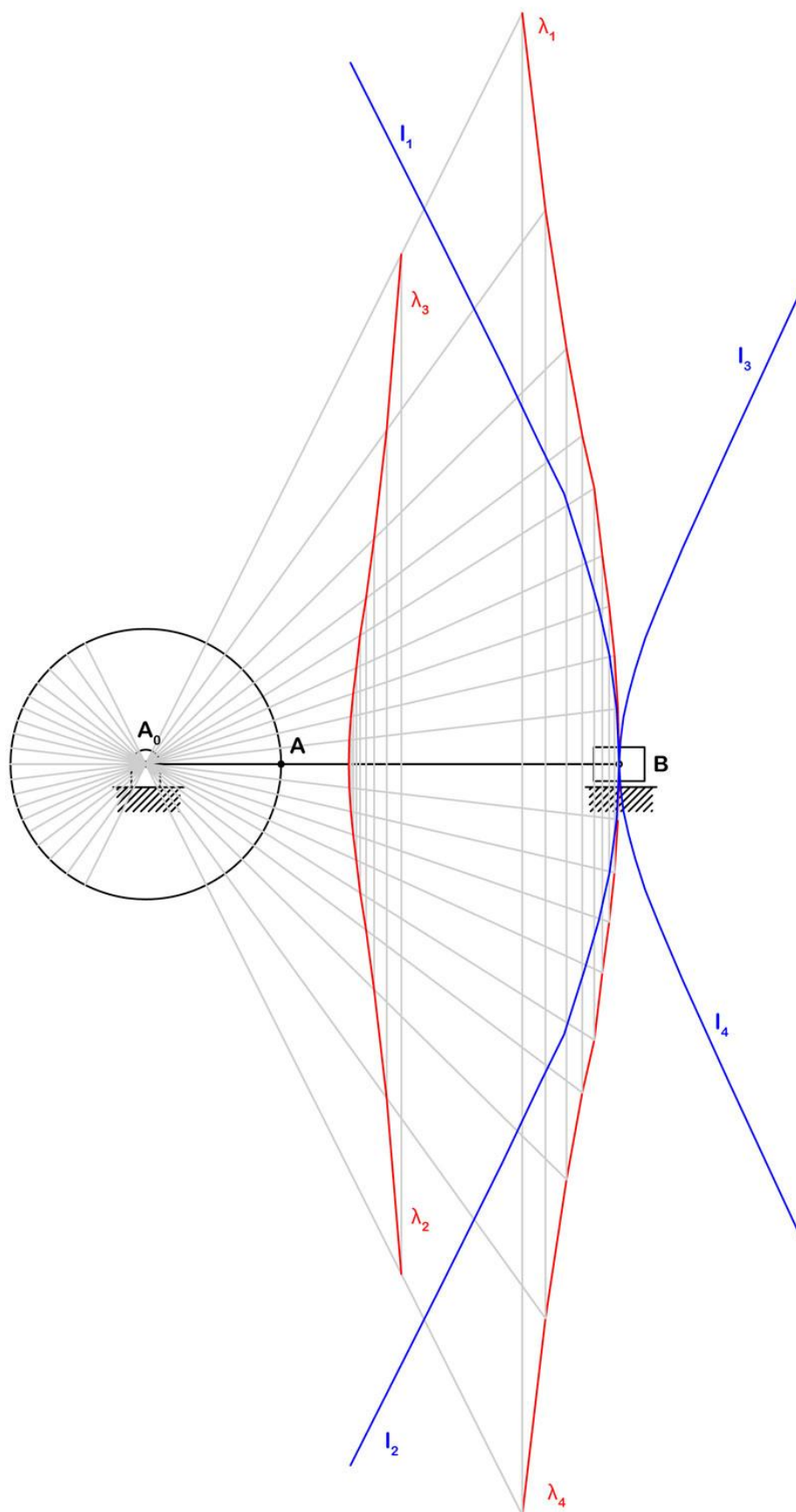
$$|\vec{v}_{MA}| = \omega_3 \cdot MA = 13 \cdot 0.25 = 3.25 \text{ m/s}$$

$$l_{v_{MA}} = \frac{|\vec{v}_{MA}|}{\sigma_v} = \frac{3.25}{2.5} = 1.3 \text{ cm}$$

$$|\vec{v}_M| = l_{v_M} \cdot \sigma_v = 2.2 \cdot 2.5 = 5.50 \text{ m/s}$$

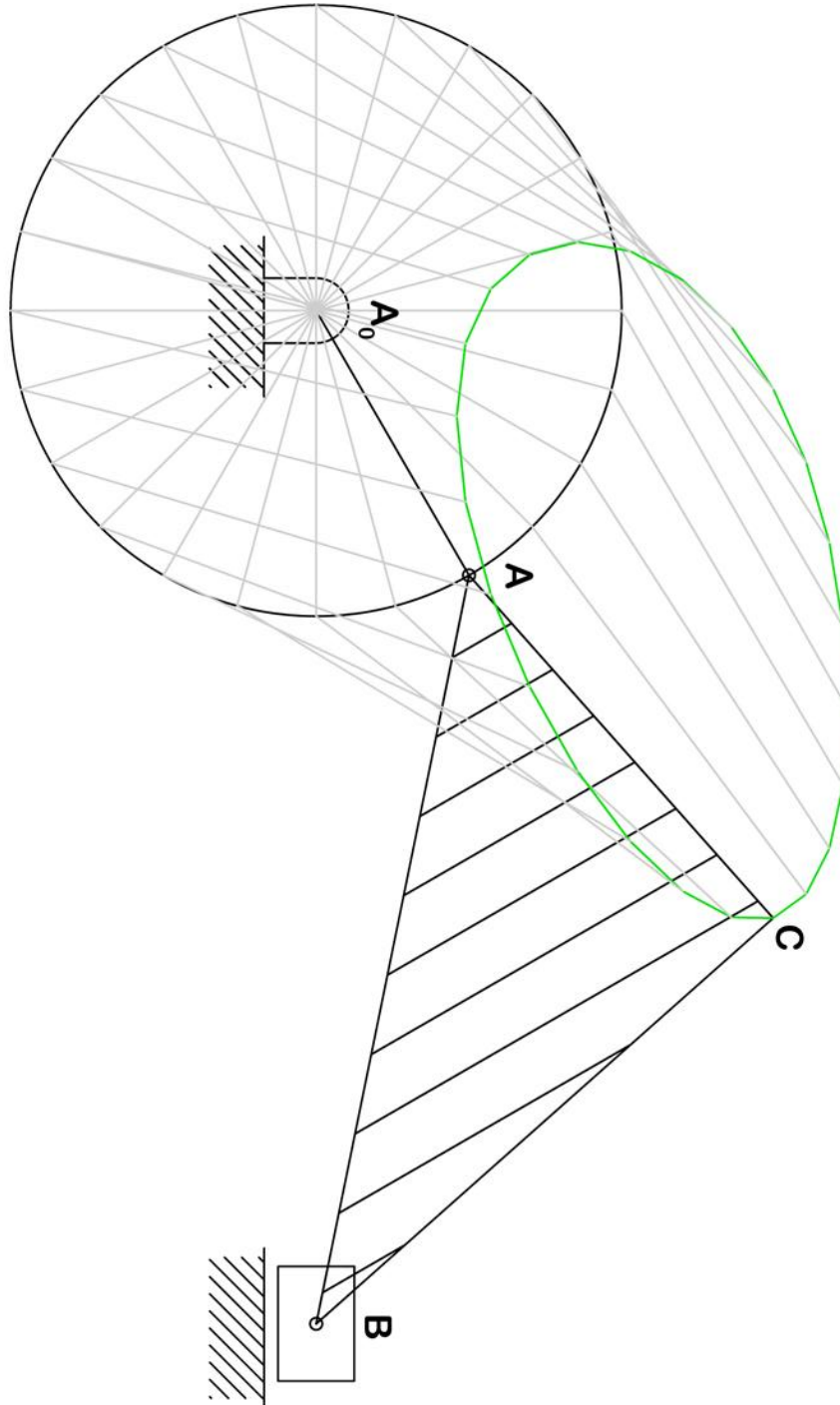
Di seguito si confrontano i risultati ottenuti con il metodo dei poli ed il metodo dei diagrammi polari:

	Metodo dei poli	Metodo dei diagrammi polari	Errore %
$ \vec{v}_B $	5.33 m/s	5.25 m/s	1.5 %
$ \vec{v}_C $	3.77 m/s	3.75 m/s	0.5 %
$ \vec{v}_M $	5.59 m/s	5.50 m/s	1.6 %
ω_3	13 rad/s	13 rad/s	0 %

Polari del moto relativo biella-telaio: Metodo del trasporto ($\sigma_1 = 10$)

**Traiettoria
di biella C :
del trasporto**

**del punto
Metodo
($\sigma_1 = 5$)**



Esercitazione N.2

Analisi cinematica del secondo ordine del manovellismo

Si consideri il manovellismo ordinario centrato di cui all'Esercitazione N.1, ove si è supposta costante la velocità angolare della manovella (α_2 nulla).

Per la configurazione che il meccanismo assume nell'istante $t_1 = 1/72$, ancora valutato a partire da quella di punto morto esterno, si calcolino, col metodo dei diagrammi polari:

1. le accelerazioni dei punti B (piede di biella), C ed M, quest'ultimo posto nella mezzeria di AB;
2. la accelerazione angolare α_3 della biella;

Si traccino le circonferenze dei flessi e di stazionarietà del moto della biella rispetto al telaio e si individuano il centro P_0 di istantanea rotazione ed il centro K delle accelerazioni.

Si calcolino, col metodo dei poli, le accelerazioni di cui al punto 1 e si confrontino i risultati ottenuti col metodo dei diagrammi polari.

Si determinino, infine, i centri di curvatura delle traiettorie dei punti C ed M nei punti stessi.

Metodo dei diagrammi polari

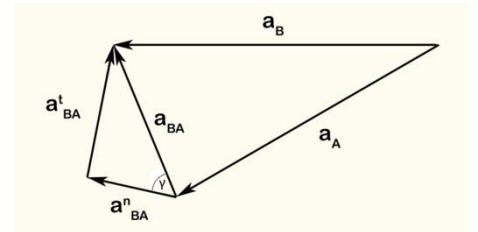
In maniera analoga all'esercitazione precedente è possibile determinare le accelerazioni dei punti a partire dalla conoscenza dell'accelerazione angolare α_2 della manovella che, supposta nulla, fornisce per il punto A:

$$|\vec{a}_A| = \omega_2^2 \cdot A_0A = 37.7^2 \cdot 0.20 = 284.26 \text{ m/s}^2$$

Risolvendo la seguente equazione vettoriale si ottiene l'accelerazione del punto B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

\vec{a}_B	=	\vec{a}_A^n	\vec{a}_A^t	\vec{a}_{BA}^n	\vec{a}_{BA}^t
$\ \vec{a}_B\ $	=	$\ \vec{a}_A^n\ $	$\perp \vec{a}_A^n$	$\ \vec{a}_{BA}^n\ $	$\perp \vec{a}_{BA}^n$
?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0A$	$\alpha_2 \cdot A_0A = 0$	$\omega_3^2 \cdot BA$?



Si deduce la scala delle accelerazioni σ_a dalla lunghezza del tratto l_{a_A} rappresentativo di \vec{a}_A :

$$\sigma_a = \frac{|\vec{a}_A|}{l_{a_A}} = \frac{284.26}{4} \cong 71$$

$$|\vec{a}_{BA}^n| = \omega_3^2 \cdot BA = 13^2 \cdot 0.50 = 84.50 \text{ m/s}^2$$

$$l_{a_{BA}^n} = \frac{|\vec{a}_{BA}^n|}{\sigma_a} = \frac{84.5}{71} = 1.2 \text{ cm}$$

$$|\vec{a}_B| = l_{a_B} \cdot \sigma_a = 4.3 \cdot 71 = 305.30 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione angolare della biella α_3 può essere ricavata da:

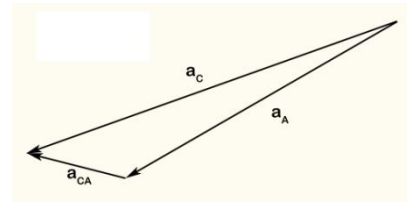
$$|\vec{a}_{BA}^t| = \alpha_3 \cdot AB = l_{a_{BA}^t} \cdot \sigma_a = 1.8 \cdot 71 = 127.80 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_3 = \frac{|\vec{a}_{BA}^t|}{AB} = \frac{127.8}{0.50} = 255.60 \text{ rad/s}^2$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per gli altri punti C ed M solidali alla biella risulta:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^t$$

\vec{a}_C	=	\vec{a}_A	\vec{a}_{CA}^n	\vec{a}_{CA}^t
?	=	$\parallel \vec{A_0A}$	$\parallel \vec{CA}$	$\perp \vec{CA}$
?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0A$?	?



L'equazione vettoriale non si può perché si hanno più di due incognite.

La direzione di \vec{a}_{CA} si può calcolare graficamente essendo l'accelerazione stessa inclinata di un angolo γ rispetto alla congiungente AC, come avviene per \vec{a}_{BA} rispetto alla congiungente AB.

Il modulo di \vec{a}_{CA} si può ricavare rispettando la seguente proporzione:

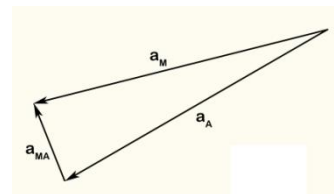
$$|\vec{a}_{CA}| : |\vec{a}_{BA}| = AC : AB$$

$$|\vec{a}_{CA}| = \frac{|\vec{a}_{BA}| \cdot AC}{AB} = \frac{153.36 \cdot 0.30}{0.50} = 92 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_C| = l_{ac} \cdot \sigma_a = 5 \cdot 71 = 355 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^t$$

\vec{a}_M	=	\vec{a}_A	\vec{a}_{MA}^n	\vec{a}_{MA}^t
?	=	$\parallel \vec{A_0A}$	$\parallel \vec{MA}$	$\perp \vec{MA}$
?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0A$?	?



L'equazione vettoriale non si può perché si hanno più di due incognite.

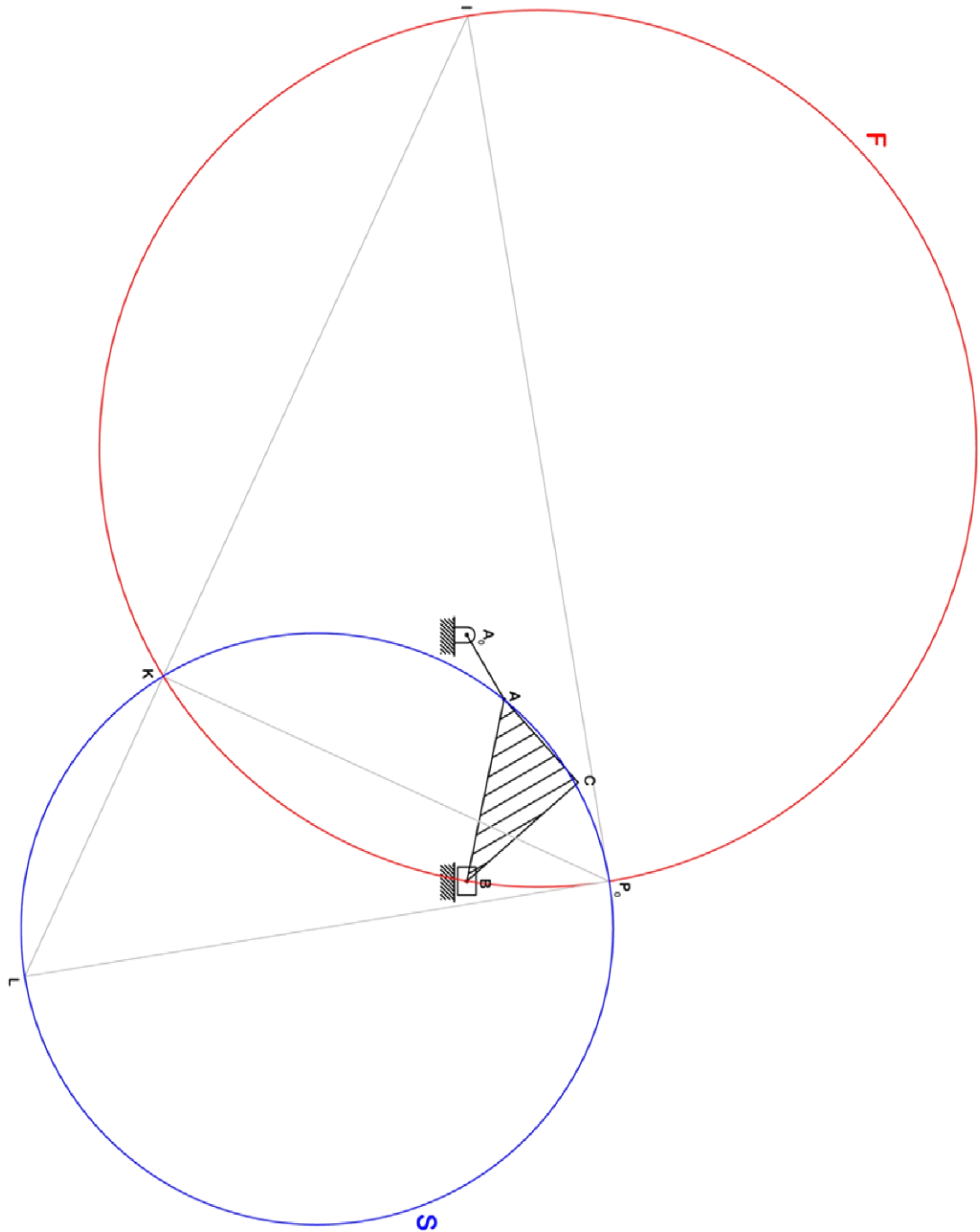
Essendo M un punto giacente sulla congiungente AB, la direzione di \vec{a}_{MA} è inclinata dell'angolo γ rispetto alla congiungente AM e quindi deve essere $\parallel \vec{a}_{BA}$.

Il modulo di \vec{a}_{MA} si può ricavare rispettando la seguente proporzione:

$$|\vec{a}_{MA}| : |\vec{a}_{BA}| = AM : AB$$

$$|\vec{a}_{MA}| = \frac{|\vec{a}_{BA}| \cdot AM}{AB} = \frac{153.36 \cdot 0.25}{0.50} = 76.68 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_M| = l_{am} \cdot \sigma_a = 4 \cdot 71 = 284 \text{ m/s}^2$$

Circonferenze dei flessi \mathcal{F} e di stazionarietà \mathcal{S} del moto della biella rispetto al telaio

Metodo dei poli

Si ricavano le accelerazioni dei punti B, C ed M attraverso il metodo dei poli.

$$|\vec{a}_A| = \omega_2^2 \cdot A_0A = 37.7^2 \cdot 0.20 = 284.26 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_B| = KB \sqrt{\alpha_3^2 + \omega_3^4}$$

ma essendo:

$$|\vec{a}_A| = KA \sqrt{\alpha_3^2 + \omega_3^4} \quad \rightarrow \quad \frac{|\vec{a}_A|}{KA} = \sqrt{\alpha_3^2 + \omega_3^4}$$

risulta:

$$|\vec{a}_B| = \frac{KB}{KA} \cdot |\vec{a}_A| = \frac{0.79}{0.73} \cdot 284.26 = 307.62 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_C| = KC \sqrt{\alpha_3^2 + \omega_3^4} = \frac{KC}{KA} \cdot |\vec{a}_A| = \frac{0.92}{0.73} \cdot 284.26 = 358.25 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_M| = KM \sqrt{\alpha_3^2 + \omega_3^4} = \frac{KM}{KA} \cdot |\vec{a}_A| = \frac{0.73}{0.73} \cdot 284.26 = 284.26 \text{ m/s}^2$$

Di seguito si confrontano i risultati ottenuti con il metodo dei poli ed il metodo dei diagrammi polari:

	Metodo dei poli	Metodo dei diagrammi polari	Errore %
$ \vec{a}_B $	307.62 m/s	305.30 m/s	0.75 %
$ \vec{a}_C $	358.25 m/s	355.00 m/s	0.92 %
$ \vec{a}_M $	284.26 m/s	284.00 m/s	0.09 %

Centri di curvatura delle traiettorie dei punti C ed M

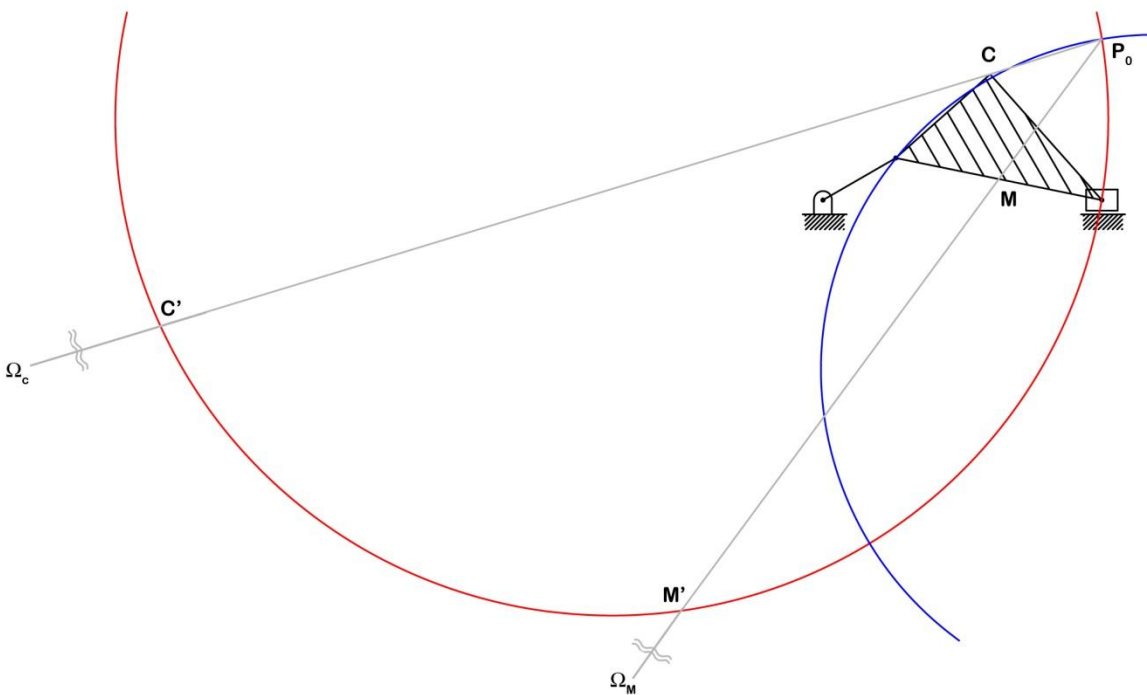
Per determinare i centri di curvatura delle traiettorie dei punti C ed M si usa la seconda espressione di Euler-Savary.

$$P_0C^2 = \Omega_c C \cdot C'C$$

$$\Omega_c C = \frac{P_0C^2}{C'C} = \frac{0.22^2}{1.65} = 0.03 \text{ m}$$

$$P_0M^2 = \Omega_M M \cdot M'M$$

$$\Omega_M M = \frac{P_0M^2}{M'M} = \frac{0.33^2}{1.02} = 0.11 \text{ m}$$



Esercitazione N.3

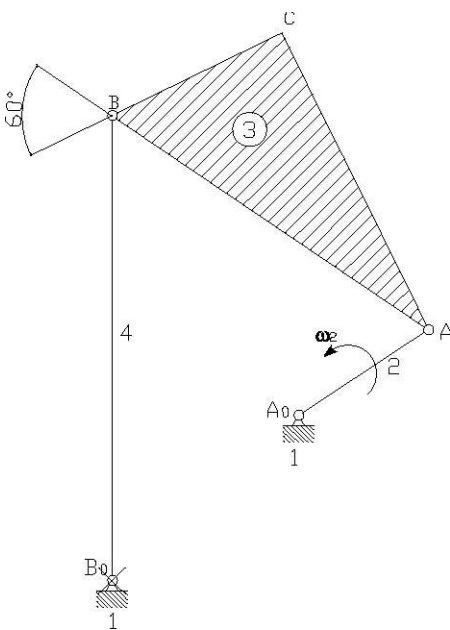
Analisi cinematica del quadrilatero articolato

Nel quadrilatero articolato, manovella-bilanciere, schematizzato in figura risulta:

$A_0A = 0.15$ m	la lunghezza della manovella,
$AB = 0.37$ m	la lunghezza della biella,
$B_0B = 0.45$ m	la lunghezza del bilanciere,
$n_2 = 50$ giri/min	costante e rotante in senso antiorario,
$B\hat{C}A = 90^\circ$	l'angolo tra i lati BC ed CA della piastra mobile ABC .

Disegnare il meccanismo tenendo presente che, in un riferimento cartesiano ortogonale con origine in A_0 ed asse X orizzontale, sono $x_{B_0} = -0.18$ m e $y_{B_0} = -0.16$ m le coordinate del centro della cerniera B_0 .

Nella configurazione che il meccanismo assume dopo un tempo $t = 0.1$ s, valutato a partire dall'istante in cui la manovella è sovrapposta al semiasse x positivo, si determinino:



- 1) il raggio di curvatura della traiettoria del punto C di biella, nel punto medesimo;
- 2) le velocità dell'estremo B del bilanciere e le velocità angolari ω_3 e ω_4 della biella e del bilanciere;
- 3) le circonferenze dei flessi e di stazionarietà del moto della biella rispetto al telaio;
- 4) le accelerazioni di B ed C , mediante il centro K delle accelerazioni, e le accelerazioni angolari α_3 ed α_4 dei membri suddetti.

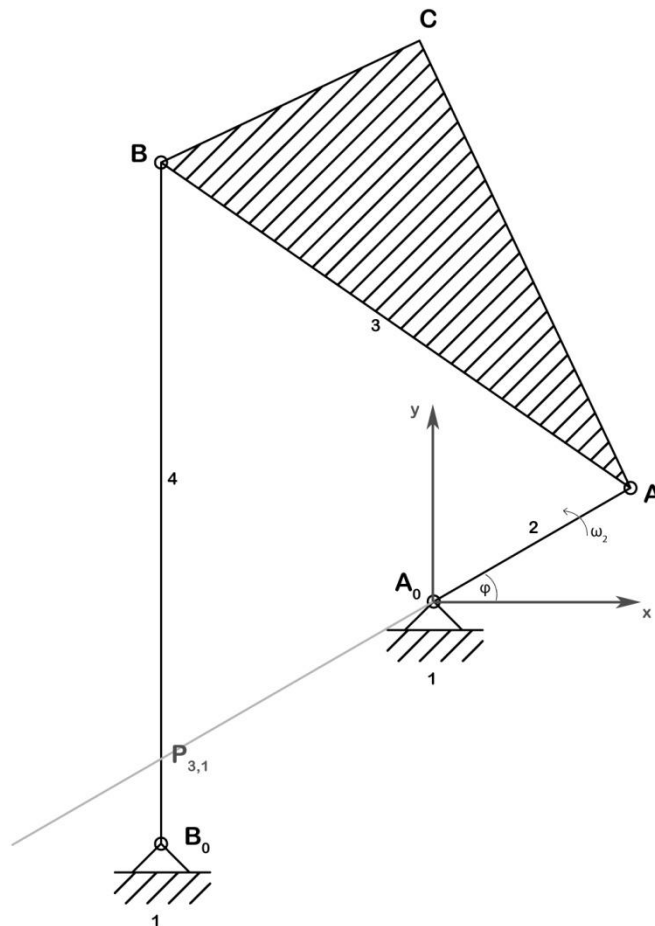
Inoltre, si disegnino le configurazioni che il meccanismo assume nelle due posizioni di punto morto del bilanciere B_0-B e si ripetano le determinazioni di cui ai punti 2) e 3) mediante diagrammi polari.

Esercizio 1. Si determini, per il quadrilatero articolato in studio, una configurazione per la quale le aste contigue al telaio siano tra loro parallele.

Esercizio 2. Si traccino le circonferenze dei flessi e di stazionarietà della biella di un manovellismo ordinario centrato con rapporto di lunghezza biella-manovella pari a 3, nella configurazione per la quale la manovella è disposta ortogonalmente alla direzione di traslazione dello stantuffo, ipotizzando costante la velocità angolare della manovella.

Raggio di curvatura della traiettoria del punto C di biella

Tenendo presente che, in un riferimento cartesiano ortogonale con origine in A_0 ed asse x orizzontale, sono $x_{B_0} = -0.18$ m e $y_{B_0} = -0.16$ m le coordinate del centro della cerniera B_0 , si rappresenta in figura il quadrilatero articolato in una scala opportuna degli spazi ($\sigma_1 = 5$), nella configurazione assunta dopo un tempo $t = 0.1$ s, valutato a partire dall'istante in cui la manovella è sovrapposta al semiasse x positivo.



Supposto che:

$$\omega_2 = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 50}{60} = 5.24 \text{ rad/s}$$

$$\varphi = \omega_2 t = 5.24 \cdot \frac{1}{10} = 0.524 \text{ rad} \cong 30^\circ$$

Per individuare il raggio di curvatura della traiettoria del punto C di biella, si deve trovare il centro istantaneo di rotazione $P_{3,1}$ ed applicare la seconda espressione di Euler-Savary.

$$P_{3,1}C^2 = \Omega_c C \cdot C'C$$

Essendo $\vec{v}_A \perp \overline{A_0A}$ e $\vec{v}_B \perp \overline{B_0B}$, il centro istantaneo di rotazione $P_{3,1}$ è determinato dall'intersezione tra la retta passante per $\overline{A_0A}$ e la retta passante per $\overline{B_0B}$.

Velocità dell'estremo B del bilanciere e le velocità angolari ω_3 e ω_4 della biella e del bilanciereMetodo dei poli

Poiché la velocità del punto A appartiene sia al corpo 2 che al corpo 3, la velocità angolare della biella ω_3 si può calcolare come segue:

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \cdot A_0A = 5.24 \cdot 0.15 = 0.79 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \cdot A_0A = \omega_3 \cdot P_{3,1}A$$

da cui si ricava:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot A_0A}{P_{3,1}A} = \frac{0.79}{0.36} = 2.2 \text{ rad/s}$$

Con lo stesso ragionamento si perviene a:

$$|\vec{v}_B| = \omega_3 \cdot P_{3,1}B = 2.2 \cdot 0.40 = 0.88 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_B| = \omega_3 \cdot P_{3,1}B = \omega_4 \cdot B_0B$$

da cui si ricava:

$$\omega_4 = \frac{\omega_3 \cdot P_{3,1}B}{B_0B} = \frac{0.88}{0.45} = 1.95 \text{ rad/s}$$

Metodo dei diagrammi polari

La velocità del centro della cerniera A può essere calcolata conoscendo il valore della velocità angolare ω_2 della manovella mediante la relazione:

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \cdot A_0A = 5.24 \cdot 0.15 = 0.79 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \cdot A_0A = \omega_3 \cdot P_{3,1}A$$

da cui si ricava:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot A_0A}{P_{3,1}A} = \frac{0.79}{0.36} = 2.2 \text{ rad/s}$$

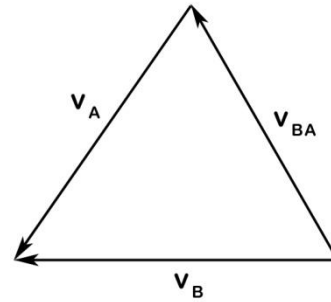
Si deduce in seguito la scala delle velocità σ_v dalla lunghezza del tratto l_{vA} rappresentativo di \vec{v}_A :

$$\sigma_v = \frac{|\vec{v}_A|}{l_{vA}} = \frac{0.79}{4} \cong 0.2$$

Risolviendo la seguente equazione vettoriale:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \omega_3 \times \vec{AB}$$

\vec{v}_B	=	\vec{v}_A	\vec{v}_{BA}
$\perp \vec{P_{3,1}B}$	=	$\perp \vec{A_0A}$	$\perp \vec{BA}$
?	=	$\omega_2 \cdot A_0A$?

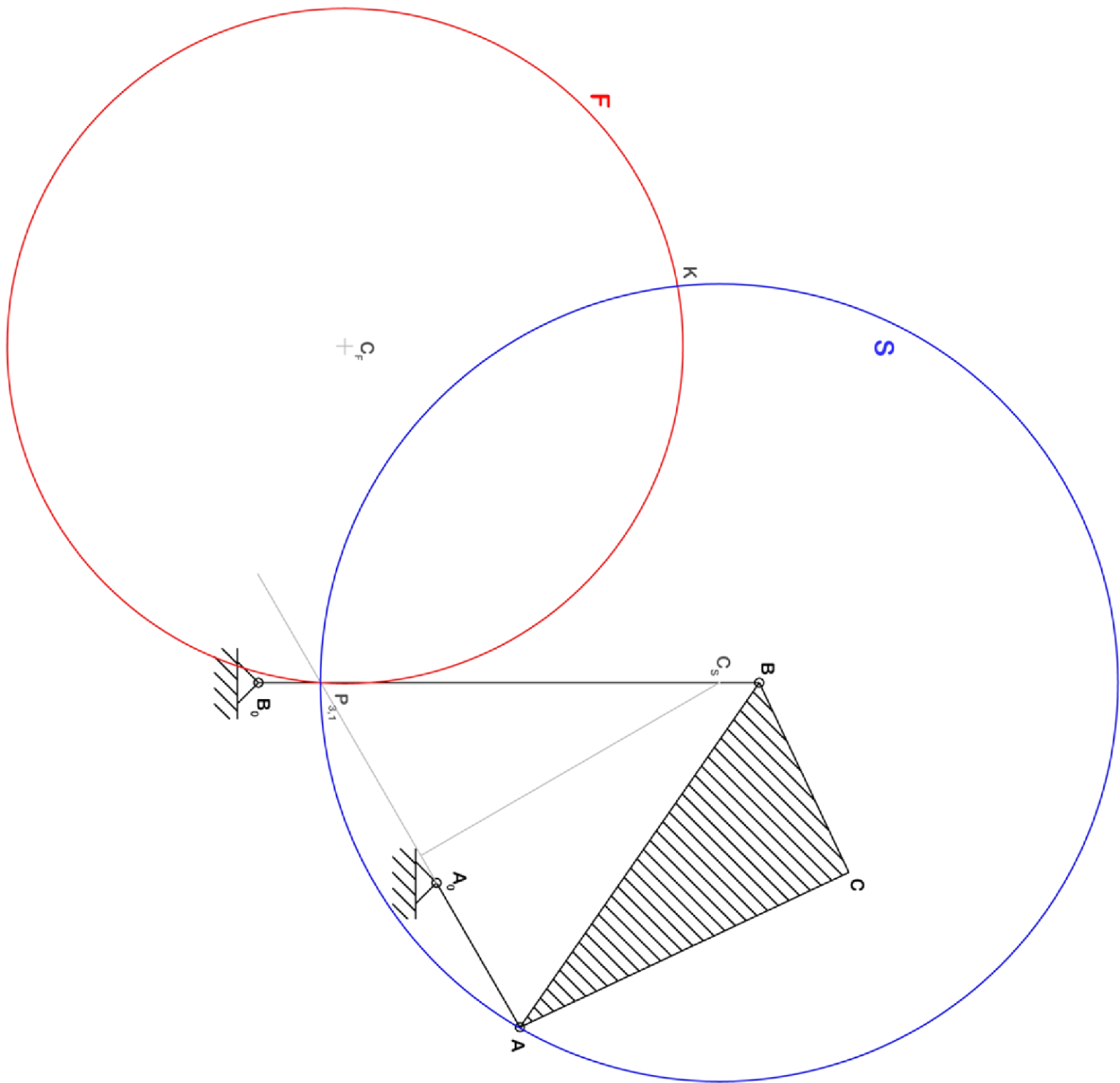


$$|\vec{v}_{BA}| = \omega_3 \cdot BA = 2.2 \cdot 0.37 = 0.81 \text{ m/s}$$

$$l_{v_{BA}} = \frac{|\vec{v}_{BA}|}{\sigma_v} = \frac{0.81}{0.2} = 4 \text{ cm}$$

$$|\vec{v}_B| = l_{v_B} \cdot \sigma_v = 4.2 \cdot 0.2 = 0.84 \text{ m/s}$$

$$\omega_4 = \frac{|\vec{v}_B|}{B_0B} = \frac{0.84}{0.45} = 1.87 \text{ rad/s}$$

Circonferenze dei flessi \mathcal{F} e di stazionarietà \mathcal{S} del moto della biella rispetto al telaio

Accelerazioni di B ed C, mediante il centro K delle accelerazioni, e le accelerazioni angolari α_3 ed α_4 dei membri suddetti

Metodo dei poli

Il centro K delle accelerazioni si determina come intersezione tra la circonferenza del flessi \mathcal{F} e quella di stazionarietà \mathcal{S} . L'angolo γ formato da \vec{a}_A ed \vec{AK} è pari a $\gamma = 42^\circ$

Dalla seguente relazione si ricava l'accelerazione α_3 ed α_4 :

$$\tan \gamma = \frac{\alpha}{\omega^2} = 0.9$$

$$\alpha_3 = \omega_3^2 \cdot 0.9 = 2.2^2 \cdot 0.9 = 4.36 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha_4 = \omega_4^2 \cdot 0.9 = 1.95^2 \cdot 0.9 = 3.24 \text{ rad/s}^2$$

Le accelerazioni di B e C sono uguali a:

$$|\vec{a}_B| = KB \cdot \sqrt{\alpha_3^2 \cdot \omega_3^4} = 0.36 \cdot \sqrt{4.36^2 \cdot 2.2^4} = 2.34 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_C| = KC \cdot \sqrt{\alpha_3^2 \cdot \omega_3^4} = 0.55 \cdot \sqrt{4.36^2 \cdot 2.2^4} = 3.58 \text{ m/s}^2$$

Metodo dei diagrammi polari

Per il punto A si determina l'accelerazione come segue:

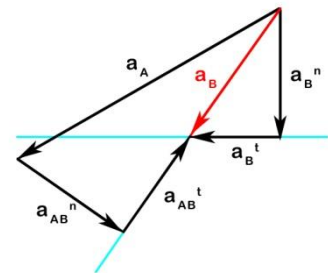
$$|\vec{a}_A| = \omega_2^2 \cdot A_0A = 5.24^2 \cdot 0.15 = 4.12 \text{ m/s}^2$$

Risolvendo la seguente equazione vettoriale si ottiene l'accelerazione del punto B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

\vec{a}_B^n	\vec{a}_B^t	=	\vec{a}_A^n	\vec{a}_{BA}^n	\vec{a}_{BA}^t
$\parallel \vec{B}_0B$	$\perp \vec{B}_0B$	=	$\parallel \vec{A}_0A$	$\parallel \vec{BA}$	$\perp \vec{BA}$
$\frac{v_B^2}{B_0B}$?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0A$	$\frac{v_{BA}^2}{BA}$?



Si deduce la scala delle accelerazioni σ_a dalla lunghezza del tratto l_{a_A} rappresentativo di \vec{a}_A :

$$\sigma_a = \frac{|\vec{a}_A|}{l_{a_A}} = \frac{4.12}{4} \cong 1.03$$

$$|\overrightarrow{a_B^n}| = \frac{v_B^2}{B_0B} = \frac{0.88^2}{0.45} = 1.72 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_{BA}^n}| = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{0.81^2}{0.37} = 1.77 \text{ m/s}^2$$

$$l_{a_B^n} = \frac{|\overrightarrow{a_B^n}|}{\sigma_a} = \frac{1.72}{1.03} \cong 1.7 \text{ cm}$$

$$l_{a_{BA}^n} = \frac{|\overrightarrow{a_{BA}^n}|}{\sigma_a} = \frac{1.77}{1.03} \cong 1.7 \text{ cm}$$

$$|\overrightarrow{a_B^t}| = l_{a_B^t} \cdot \sigma_a = 1.2 \cdot 1.03 = 1.24 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_B}| = l_{a_B} \cdot \sigma_a = 2.1 \cdot 1.03 = 2.16 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione angolare della biella α_3 può essere ricavata da:

$$|\overrightarrow{a_{BA}^t}| = \alpha_3 \cdot BA = l_{a_{BA}^t} \cdot \sigma_a = 1.5 \cdot 1.03 = 1.55 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_3 = \frac{|\overrightarrow{a_{BA}^t}|}{BA} = \frac{1.55}{0.37} = 4.19 \text{ rad/s}^2$$

L'accelerazione angolare della biella α_4 può essere ricavata da:

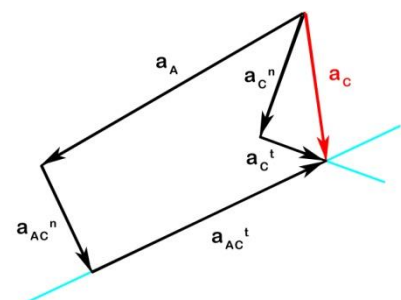
$$\alpha_4 = \frac{|\overrightarrow{a_B^t}|}{B_0B} = \frac{1.24}{0.45} = 2.97 \text{ rad/s}^2$$

Risolvendo la seguente equazione vettoriale si ottiene l'accelerazione del punto C:

$$\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{CA}}$$

$$\overrightarrow{a_C^n} + \overrightarrow{a_C^t} = \overrightarrow{a_A^n} + \overrightarrow{a_{CA}^n} + \overrightarrow{a_{CA}^t}$$

$\overrightarrow{a_C^n}$	$\overrightarrow{a_C^t}$	=	$\overrightarrow{a_A^n}$	$\overrightarrow{a_{CA}^n}$	$\overrightarrow{a_{CA}^t}$
$\parallel \overrightarrow{\Omega_C C}$	$\perp \overrightarrow{\Omega_C C}$	=	$\parallel \overrightarrow{A_0 A}$	$\parallel \overrightarrow{CA}$	$\perp \overrightarrow{CA}$
$\omega_3^2 \cdot \Omega_C C$?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0 A$	$\omega_3^2 \cdot AC$?



Si deduce la scala delle accelerazioni σ_a dalla lunghezza del tratto l_{a_A} rappresentativo di \vec{a}_A :

$$\sigma_a = \frac{|\vec{a}_A|}{l_{a_A}} = \frac{4.12}{4} \cong 1.03$$

$$|\vec{a}_C^{\vec{n}}| = \omega_3^2 \cdot \Omega_c C = 2.2^2 \cdot 0.37 = 1.79 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_{CA}^{\vec{n}}| = \omega_3^2 \cdot AC = 2.2^2 \cdot 0.33 = 1.59 \text{ m/s}^2$$

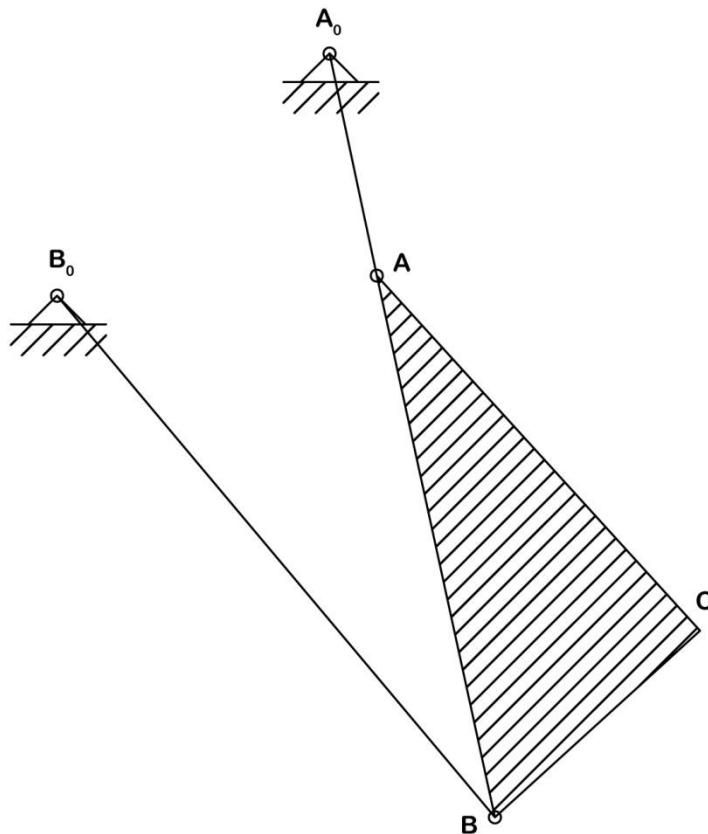
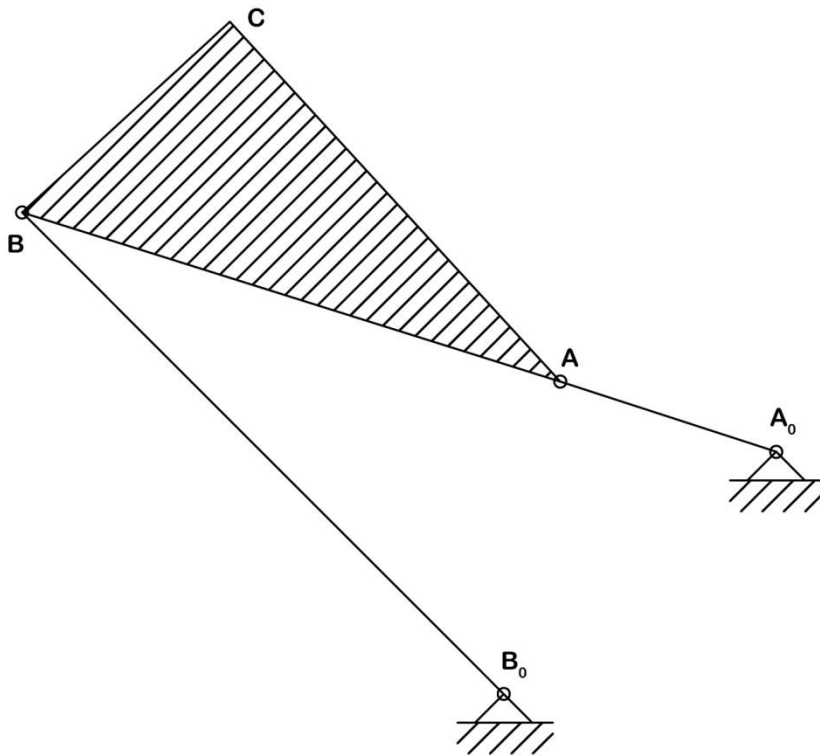
$$l_{a_C^{\vec{n}}} = \frac{|\vec{a}_C^{\vec{n}}|}{\sigma_a} = \frac{1.79}{1.03} \cong 1.7 \text{ cm}$$

$$l_{a_{CA}^{\vec{n}}} = \frac{|\vec{a}_{CA}^{\vec{n}}|}{\sigma_a} = \frac{1.59}{1.03} \cong 1.5 \text{ cm}$$

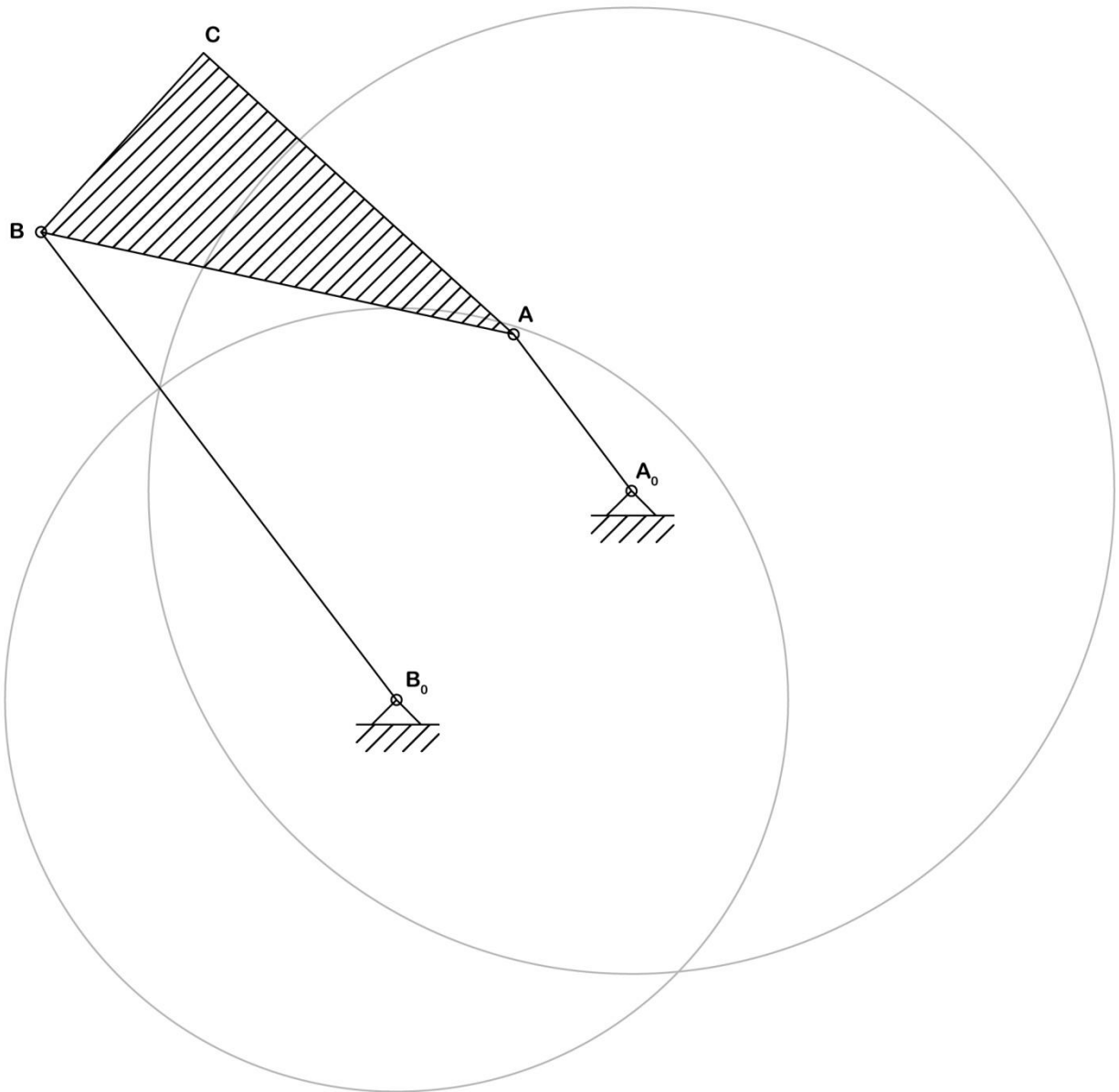
$$|\vec{a}_C^{\vec{t}}| = l_{a_C^{\vec{t}}} \cdot \sigma_a = 0.9 \cdot 1.03 = 0.93 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_C| = l_{a_C} \cdot \sigma_a = 3.2 \cdot 1.03 = 3.32 \text{ m/s}^2$$

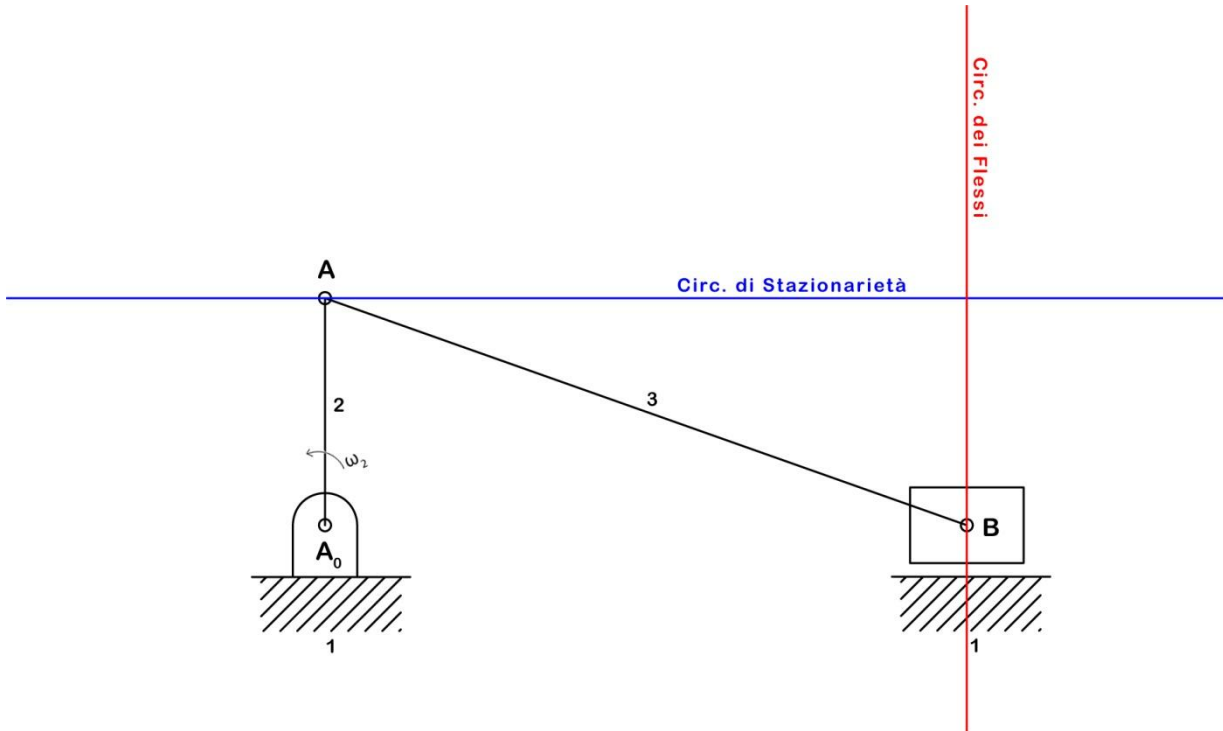
Configurazioni che il meccanismo assume nelle due posizioni di punto morto del bilanciere B_0B



Esercizio 1. Si determina, per il quadrilatero articolato in studio, una configurazione per la quale le aste contigue al telaio siano tra loro parallele.



Esercizio 2. Si tracciano le circonferenze dei flessi e di stazionarietà della biella di un manovellismo ordinario centrato con rapporto di lunghezza biella-manovella pari a 3, nella configurazione per la quale la manovella è disposta ortogonalmente alla direzione di traslazione dello stantuffo, ipotizzando costante la velocità angolare della manovella.



Esercitazione N.4

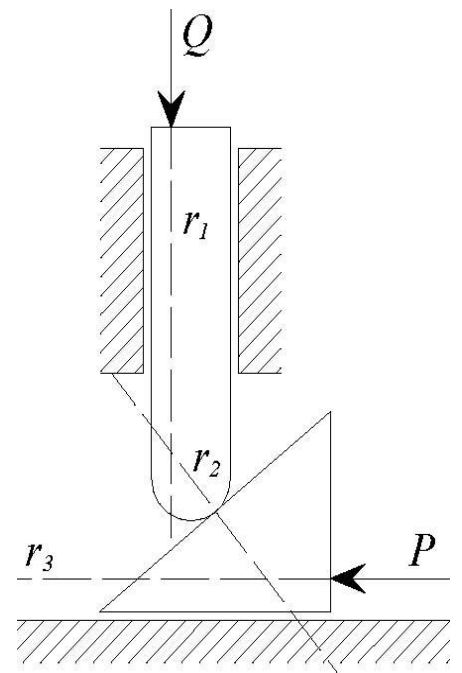
Esercizi di statica risolti mediante il principio di disgregazione e il teorema dei lavori virtuali.

Esercizio n. 1

Dopo aver riprodotto in scala il sistema cuneo e cardine, nel rispetto delle proporzioni rappresentate in Figura, si calcoli il valore della forza P necessaria a sollevare il carico $Q = 200$ N, avendo assunto:

- ideale il sistema;
- r_1 la retta d'azione del carico Q da sollevare, a velocità costante;
- r_3 la retta d'azione della forza motrice P ;
- r_2 la normale alle superfici di contatto tra il cuneo e l'asta;
- pari a 2,5 cm la larghezza dell'asta (rilevare le altre dimensioni e gli angoli dal disegno);
- trascurabili i pesi del cuneo e dell'asta;
- rigidi tutti i corpi;
- trascurabile il gioco tra asta e collare.

Si ripetano i calcoli schematizzando la reazione del collare come due forze agenti agli estremi del collare stesso. Si confrontino i valori delle reazioni nei due casi.

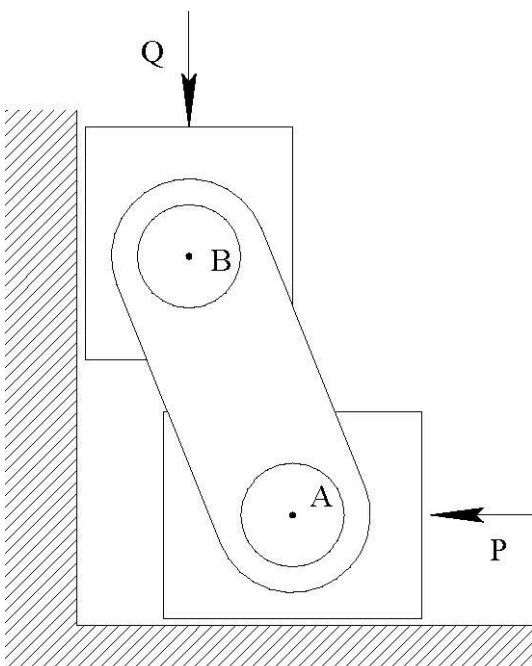


Esercizio n. 2

Un doppio pattino avente le proporzioni indicate in Figura è, nella configurazione considerata, soggetto all'azione del carico $Q = 150$ N e della forza motrice P . Assumendo:

- il sistema ideale;
- rigidi tutti i corpi;
- il sistema in equilibrio statico;
- trascurabili le forze peso;

si calcoli il valore della forza motrice P ideale atta a rendere equilibrato il sistema. Si calcolino, infine, i valori delle reazioni.

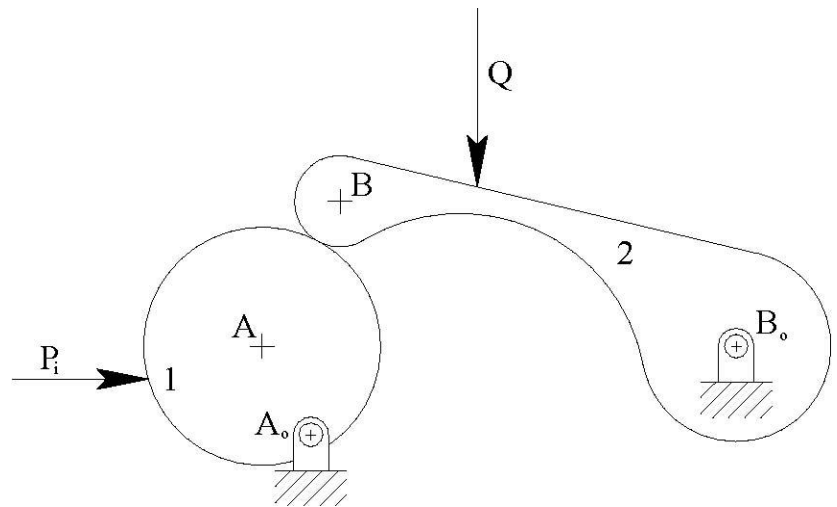


Esercizio n. 3 – Leve striscianti

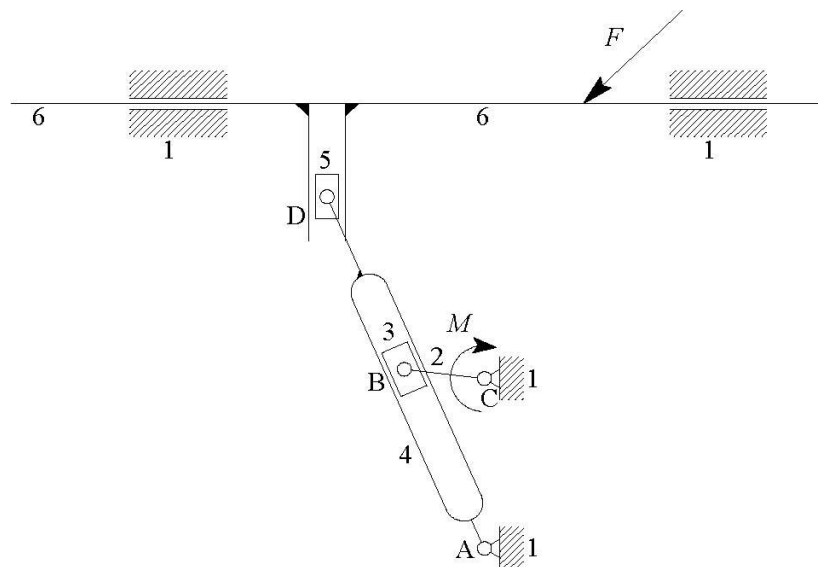
Si calcoli, con il metodo dei diagrammi polari, il valore del modulo della forza P_i che rende equilibrato staticamente il sistema (ideale) composto dalle due leve rappresentate in figura.

Si assuma che:

- il modulo della forza Q agente sulla leva 2 abbia modulo pari a 230 N;
- il sistema sia configurato nel rispetto delle proporzioni assunte nella figura e che, in particolare, le rette d'azione delle due forze siano quelle rappresentate sul disegno;
- l'azione del campo gravitazionale sia ininfluente;
- i centri delle cerniere di banco A_o e B_o distino 35 cm.

**Esercizio n. 4 – Guida di Fairbairn.**

Nel rispetto delle proporzioni indicate nella figura e nella configurazione ivi riportata si calcoli, col metodo dei diagrammi polari, il valore del momento M che, applicato alla manovella 2, rende equilibrato staticamente il meccanismo illustrato (supposto ideale), avendo assunto pari a 20 cm la lunghezza della manovella CB e pari a 50 N il modulo della forza F agente sulla slitta 6 applicata lungo la retta d'azione rappresentata. Si assuma ininfluente l'azione della gravità

**Esercizio n. 5 – Metodo basato sul PLV**

Si risolvano i 4 esercizi precedenti applicando il principio dei lavori virtuali e si confrontino i risultati ottenuti mediante l'applicazione del principio di disgregazione.

Esercizio 1. Calcolo della forza P necessaria a sollevare il carico $Q = 200 \text{ N}$.

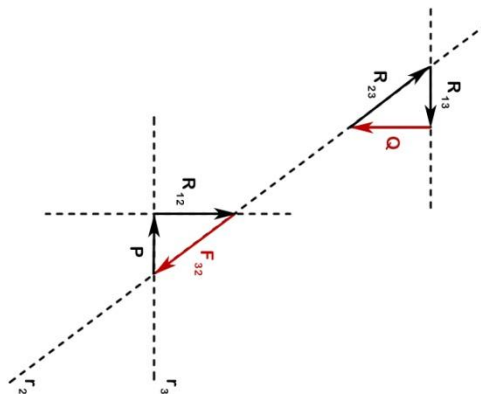
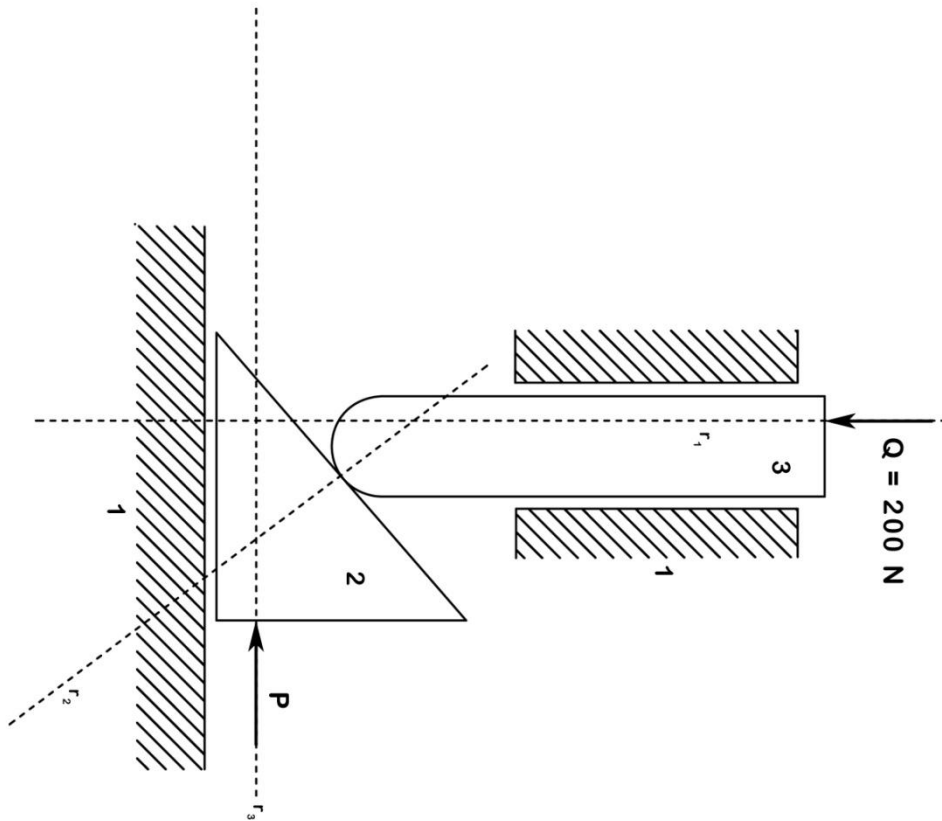
Disegno in scala 1:2

$$Q = 200 \text{ N} = 1 \text{ cm}$$

$$R_{12} = 200 \text{ N}$$

$$P = 174 \text{ N}$$

$$R_{13} = 174 \text{ N}$$



Esercizio 1 - Bis. *Calcolo delle forze di reazione agenti agli estremi del collare.*

Disegno in scala 1:2

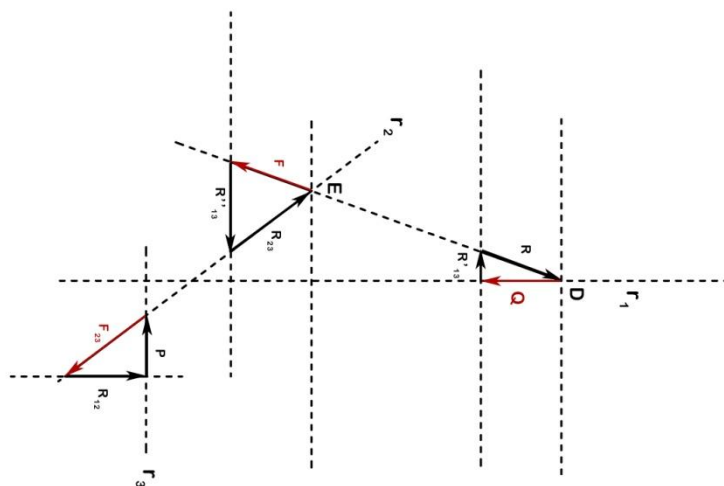
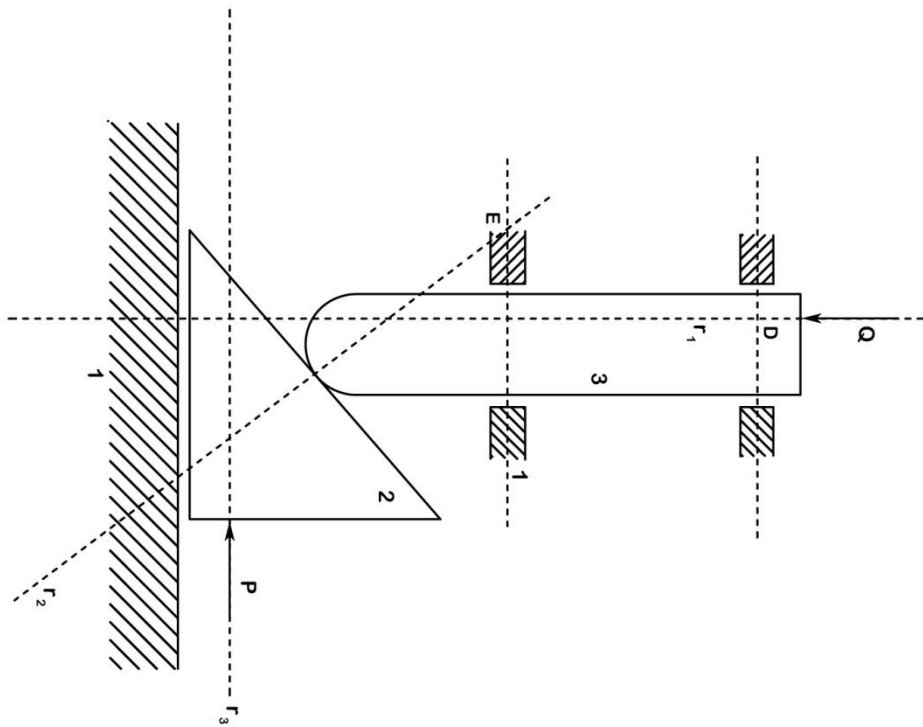
$Q = 200 \text{ N} = 1 \text{ cm}$

$R_{12} = 120 \text{ N}$

$P = 103 \text{ N}$

$R'_{13} = 72 \text{ N}$

$R''_{13} = 245 \text{ N}$



Esercizio 2. Calcolo della forza P atta a rendere equilibrato il sistema e i valori delle reazioni.

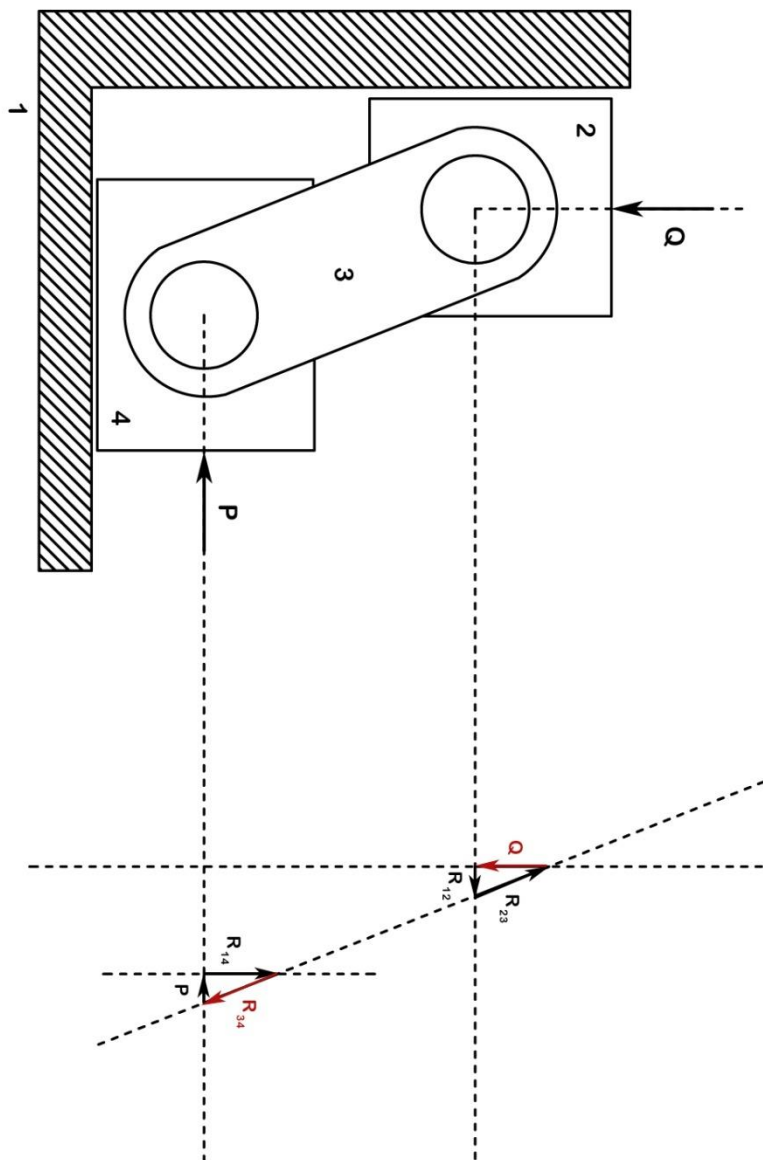
Disegno in scala 1:2

$$Q = 150 \text{ N} = 0.75 \text{ cm}$$

$$R_{12} = 60 \text{ N}$$

$$P = 60 \text{ N}$$

$$R_{14} = 150 \text{ N}$$



Esercizio 3. Calcolo della forza P atta a rendere equilibrato il sistema e i valori delle reazioni.

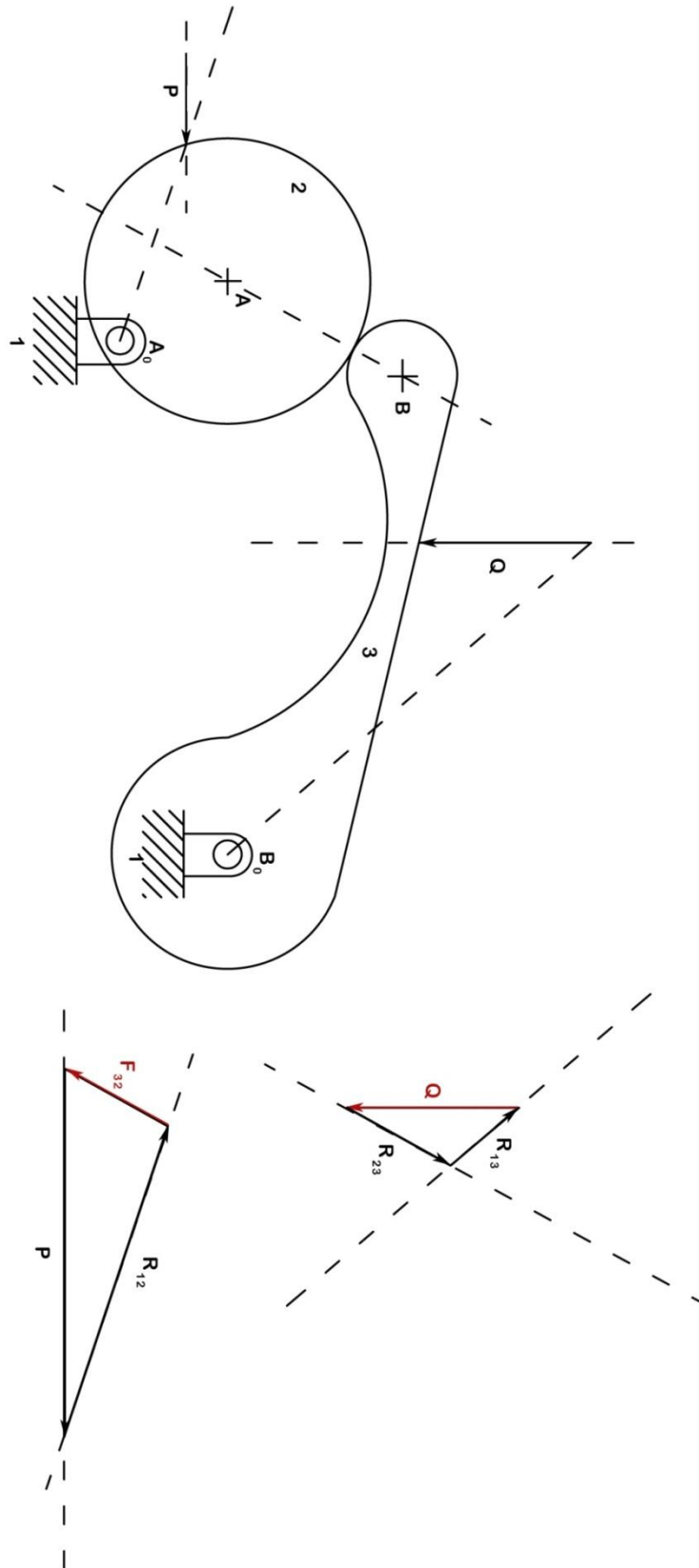
Disegno in scala 1:5

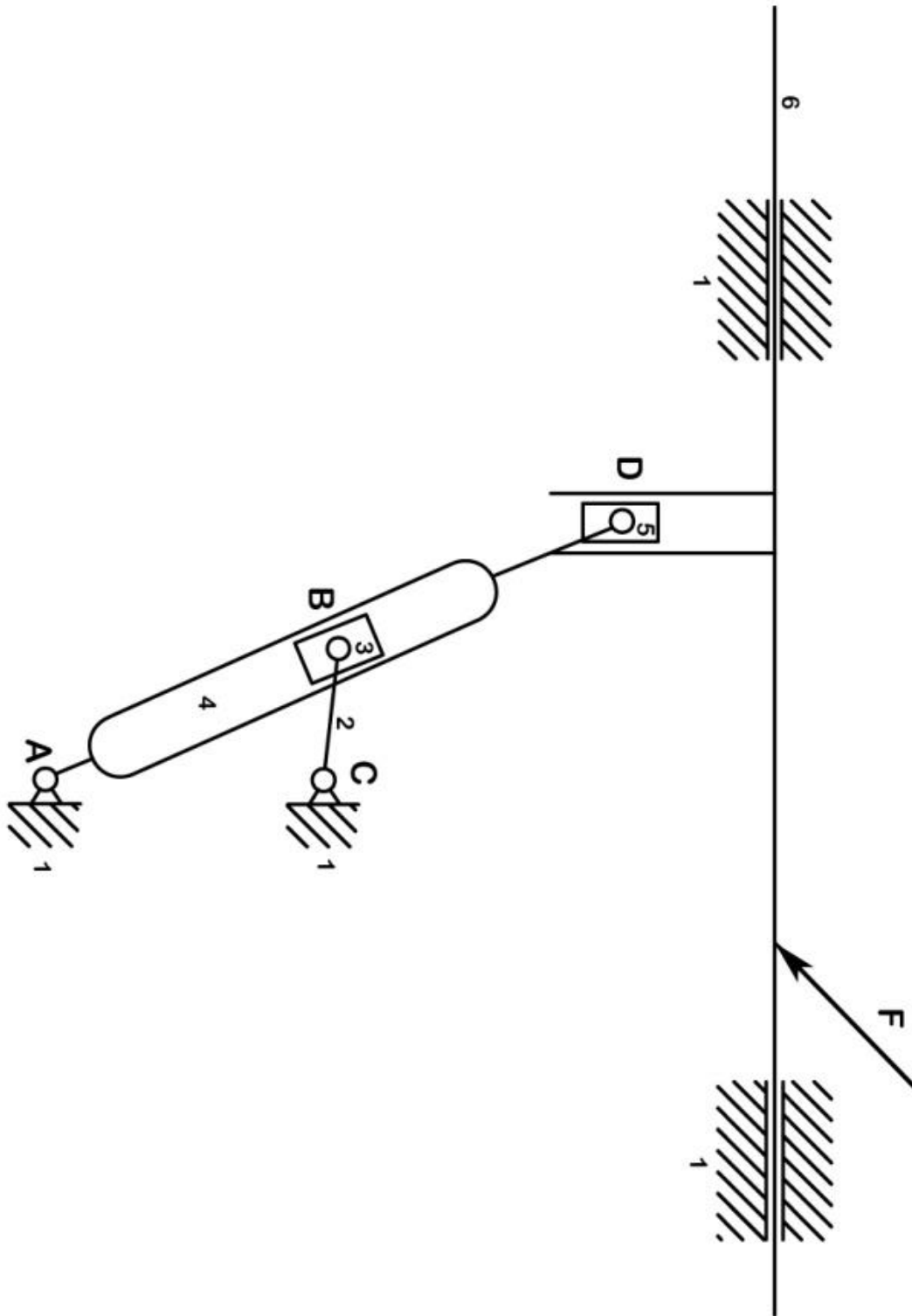
$Q = 230 \text{ N} = 2.3 \text{ cm}$

$P = 490 \text{ N}$

$R_{12} = 436 \text{ N}$

$R_{13} = 120 \text{ N}$

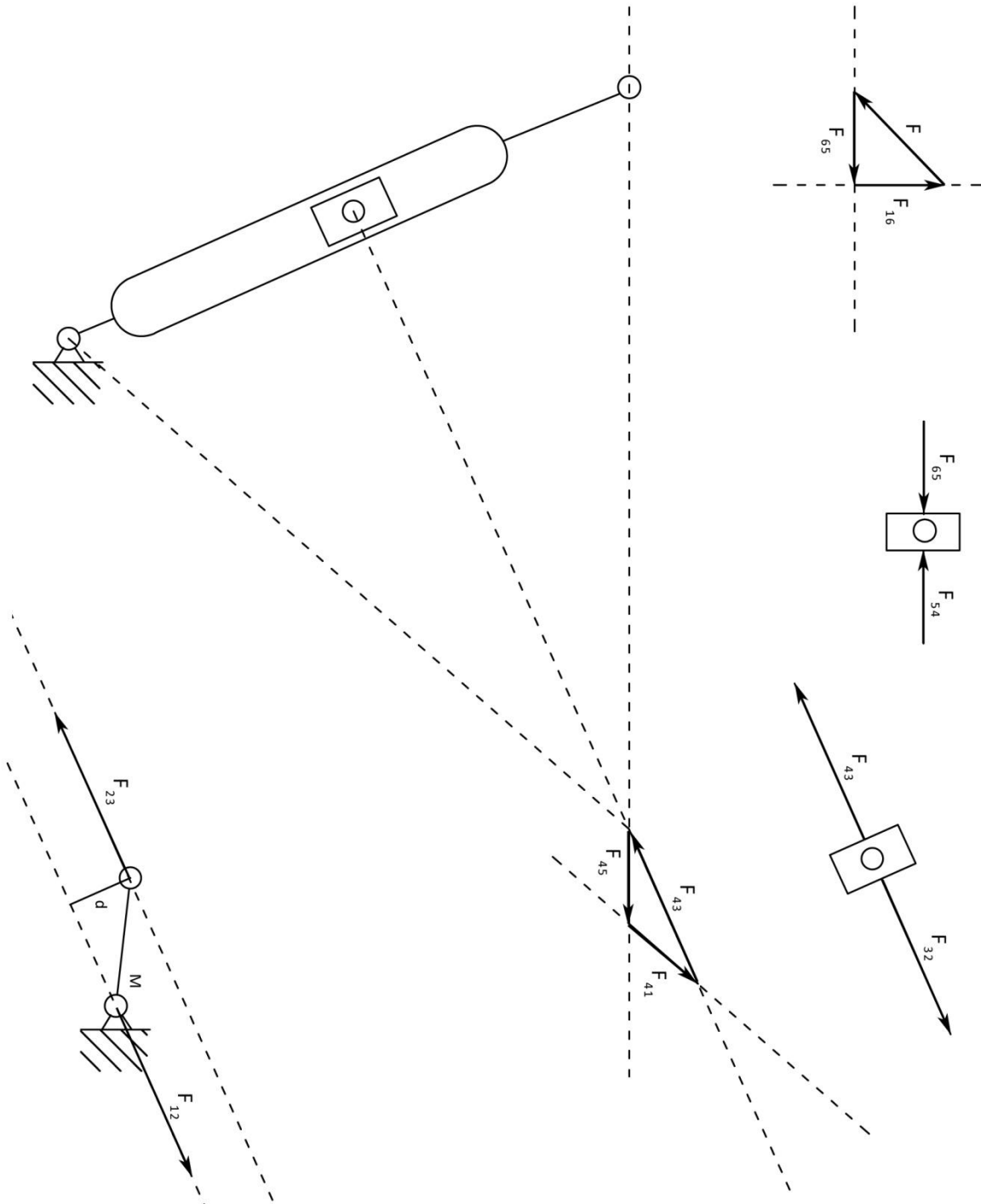




Esercizio 4.
Calcolo del valore del momento M che rende staticamente equilibrato il sistema.

Disegno in scala 1:10

$F = 50 \text{ N} = 2 \text{ cm}$



$$M = F_{23} \cdot d = 66 \cdot 0,11 = 7,3 \text{ Nm}$$

Esercizio 5. Si risolvano i 4 esercizi precedenti applicando il principio dei lavori virtuali.

Esercizio 1

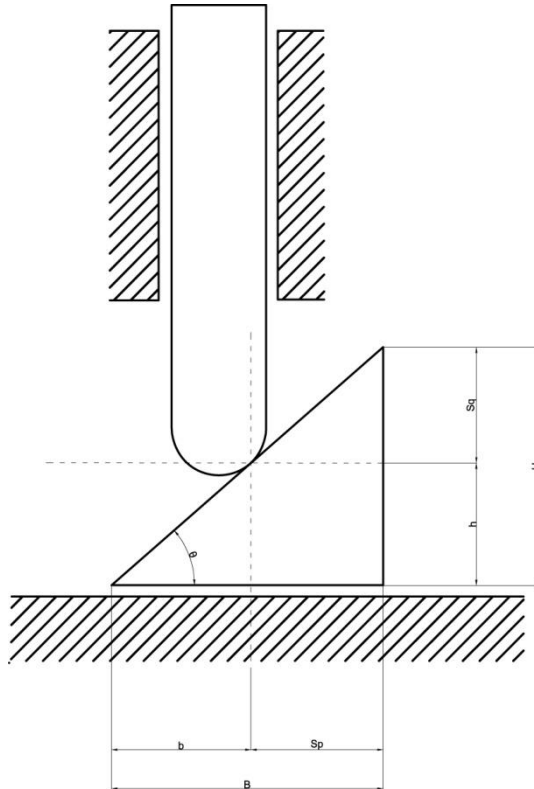
$$\vec{P} \cdot \delta \vec{s}_p + \vec{Q} \cdot \delta \vec{s}_q = 0$$

$$s_q = H - h = (L - l) \sin \theta$$

$$s_p = B - b = (L - l) \cos \theta$$

$$P = -Q \frac{s_q}{s_p} = -Q \frac{\sin \theta}{\cos \theta} =$$

$$= -Q \operatorname{tg} \theta = -200 \operatorname{tg} 41^\circ = 174 \text{ N}$$



Esercizio 2

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{s}_p + \vec{Q} \cdot \delta \vec{s}_q = 0$$

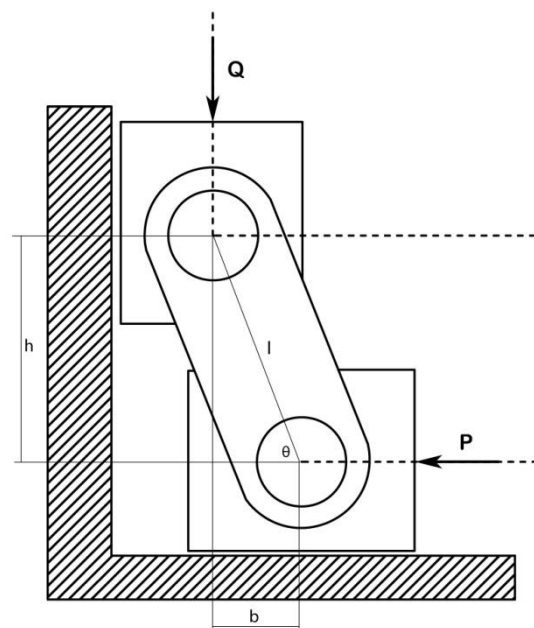
$$b : h = s_p : s_q$$

$$b = l \cos \theta$$

$$h = l \sin \theta$$

$$P = -Q \frac{s_p}{s_q} = -Q \frac{b}{h} = -Q \frac{\cos \theta}{\sin \theta} =$$

$$= -Q \operatorname{cotg} \theta = -150 \operatorname{cotg} 69^\circ = 58 \text{ N}$$



Esercizio 3

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{s}_P + \vec{Q} \cdot \delta \vec{s}_Q = 0$$

$$\vec{P} \cdot \vec{v}_P dt + \vec{Q} \cdot \vec{v}_Q dt = 0$$

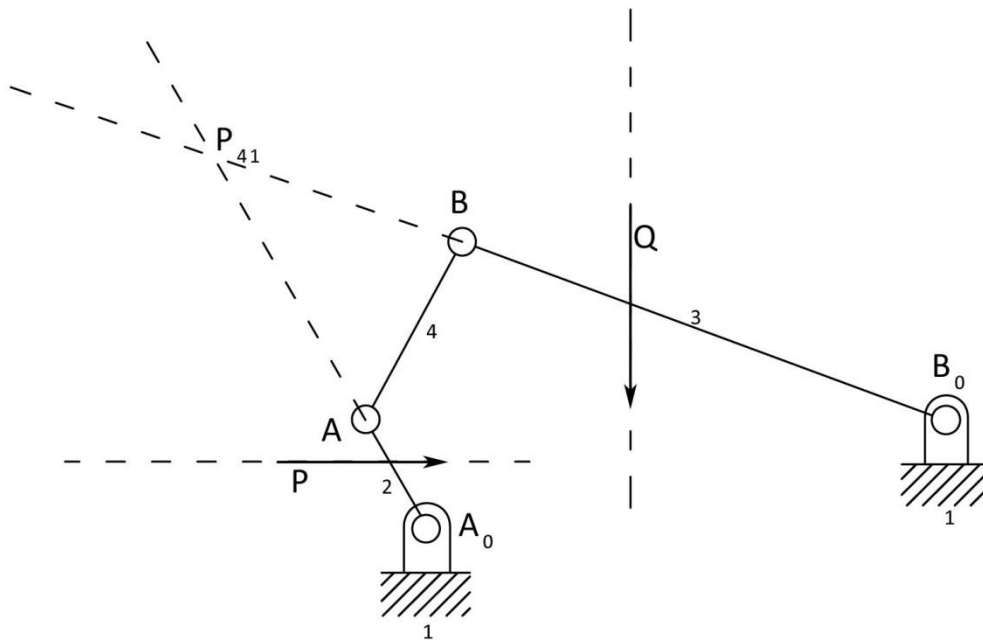
$$P = -Q \frac{v_Q}{v_P} = -Q \frac{\omega_3 B_0 Q}{\omega_2 A_0 Q} = -Q \frac{A_0 A}{B_0 B} \frac{P_{41} B}{P_{41} A} \cdot \frac{B_0 Q}{A_0 Q} = 480 \text{ N}$$

Meccanismo equivalente:

$$\begin{cases} v_A = \omega_2 A_0 A \\ v_A = \omega_4 P_{41} A \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_B = \omega_3 B_0 B \\ v_B = \omega_4 P_{41} B \end{cases}$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{A_0 A}{B_0 B} \frac{P_{41} B}{P_{41} A}$$



Esercizio 4

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{s}_F + \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} = 0$$

$$F \cdot v_{D6} + M \cdot \omega_2 = 0$$

Moti relativi:

$$v_{B3} = v_{B2} + v_{B32}$$

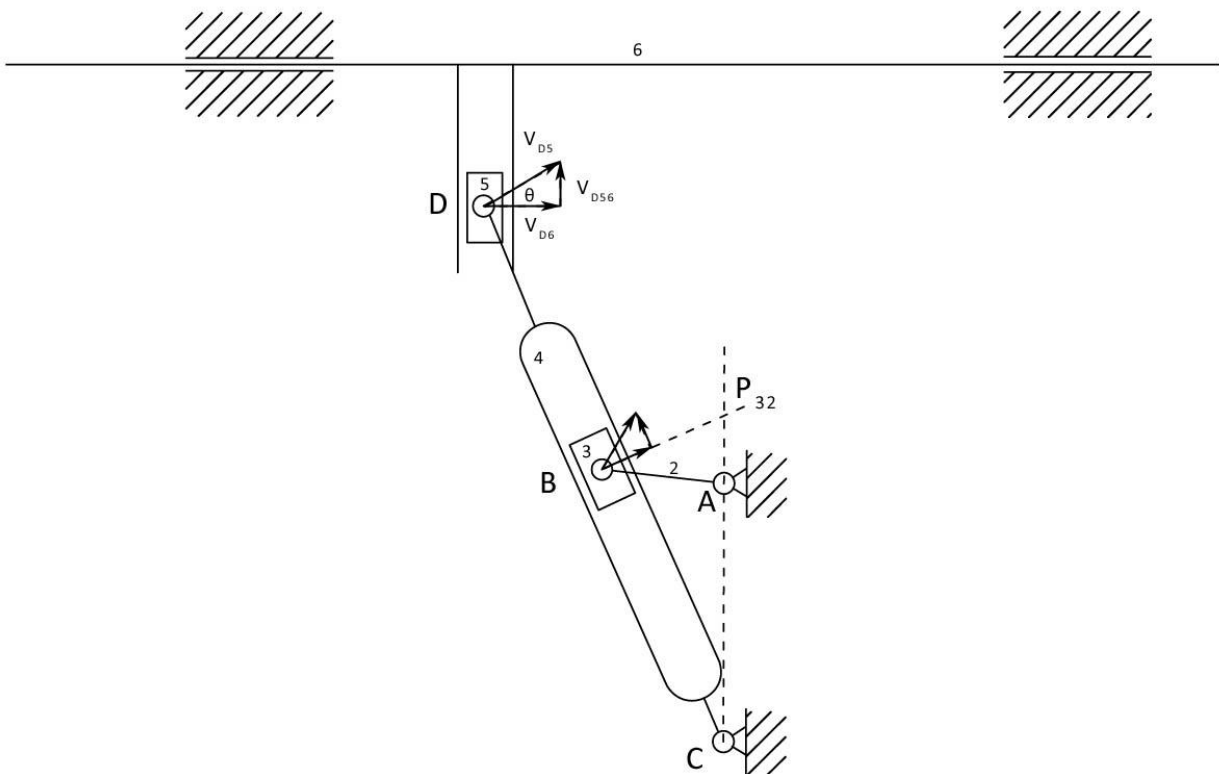
$$\omega_2 P_{32} A = \omega_4 P_{32} C$$

$$\omega_2 = \omega_4 \frac{P_{32} C}{P_{32} A}$$

Decomposizione v_{D5} :

$$v_{D6} = v_{D5} \cos \theta = \omega_4 CD \cos \theta$$

$$M = -F \frac{v_{D6}}{\omega_2} = -F \frac{CD \cos \theta}{\frac{P_{32} C}{P_{32} A}} = 50 \frac{0.95 \cos 23}{\frac{0.53}{0.10}} = 8.3 \text{ Nm}$$



Esercitazione N.5

Problema dinamico diretto per una massa localizzata

Ad un corpo di massa m , inizialmente in quiete, è applicata una forza F continua, variabile in funzione del tempo secondo la relazione:

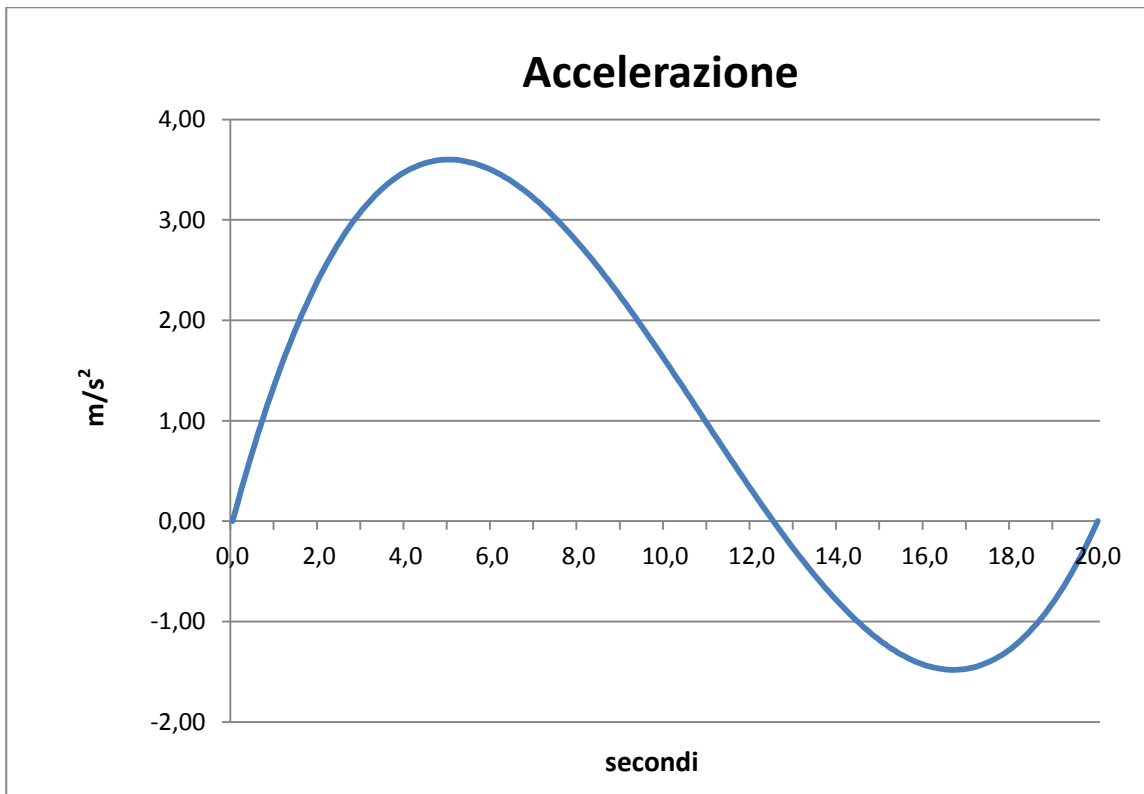
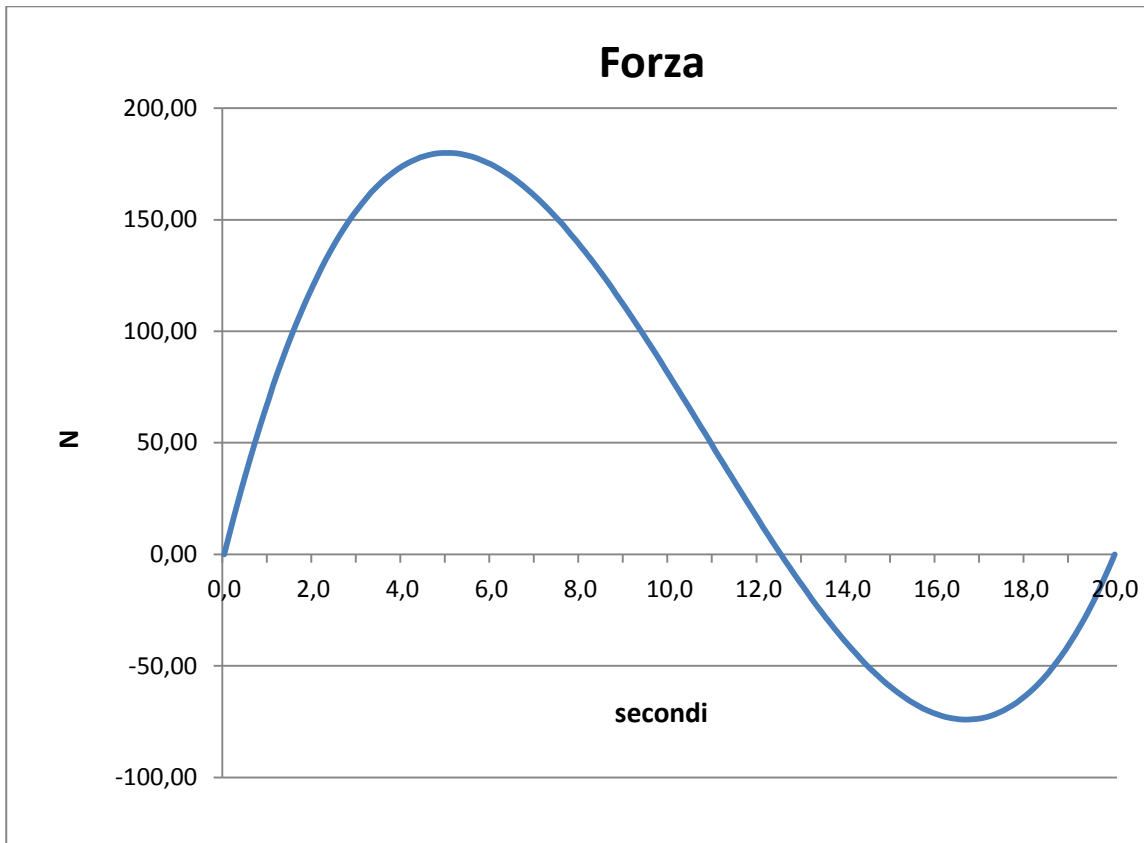
$$F = A t^3 + B t^2 + C t \quad (*)$$

A partire dal diagramma della forza e, quindi, dell'accelerazione, si ricavi il diagramma della velocità, della quantità di moto, dell'energia cinetica E e dello spazio s , mediante formule di integrazione numerica iterativa di Bezout $Y_{i+1} = Y_i + \Delta x \cdot \left(\frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right)$ e Cavalieri-Simpson $Y_{i+2} = Y_i + 2\Delta x \cdot \left(\frac{y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}}{6}\right)$.

Dedotti, inoltre, i valori che assumono F , a , v , q , E ed s negli istanti t_1, t_2 e t_3 (*), risolvere il problema analiticamente e determinare, per confronto, gli errori relativi della risoluzione numerica.

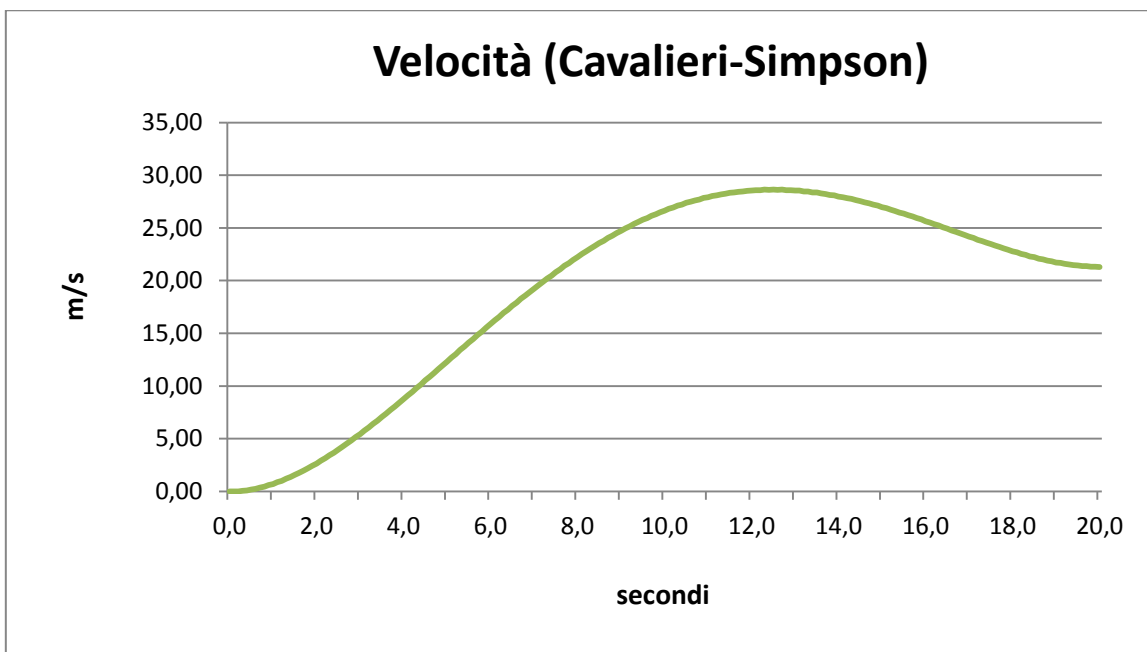
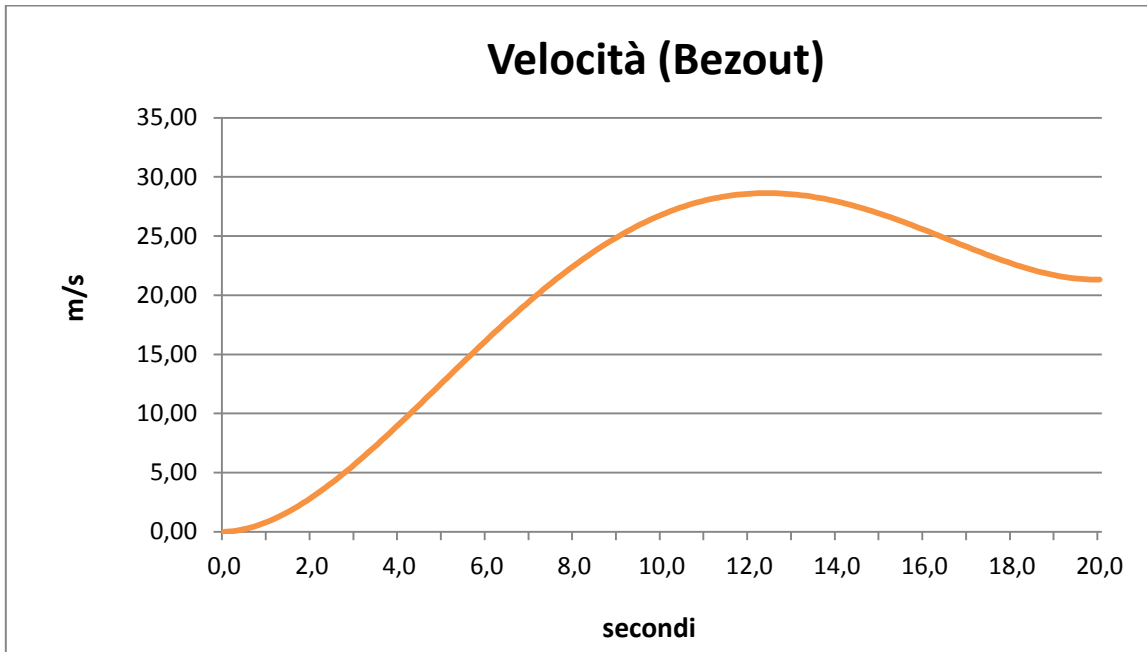
(*) si assuma:

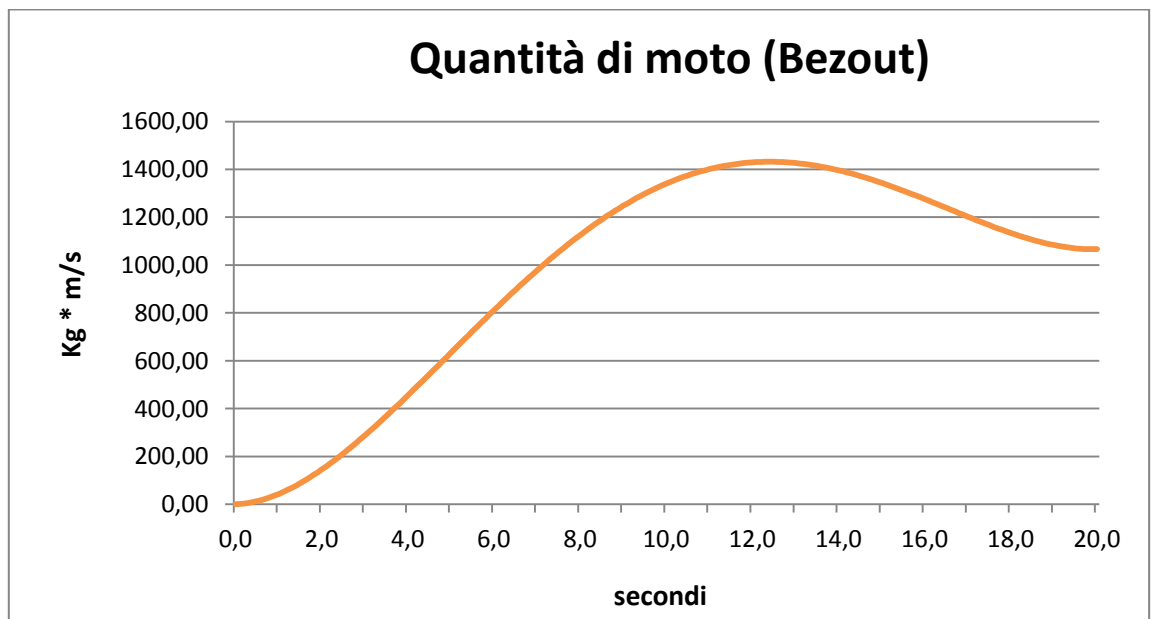
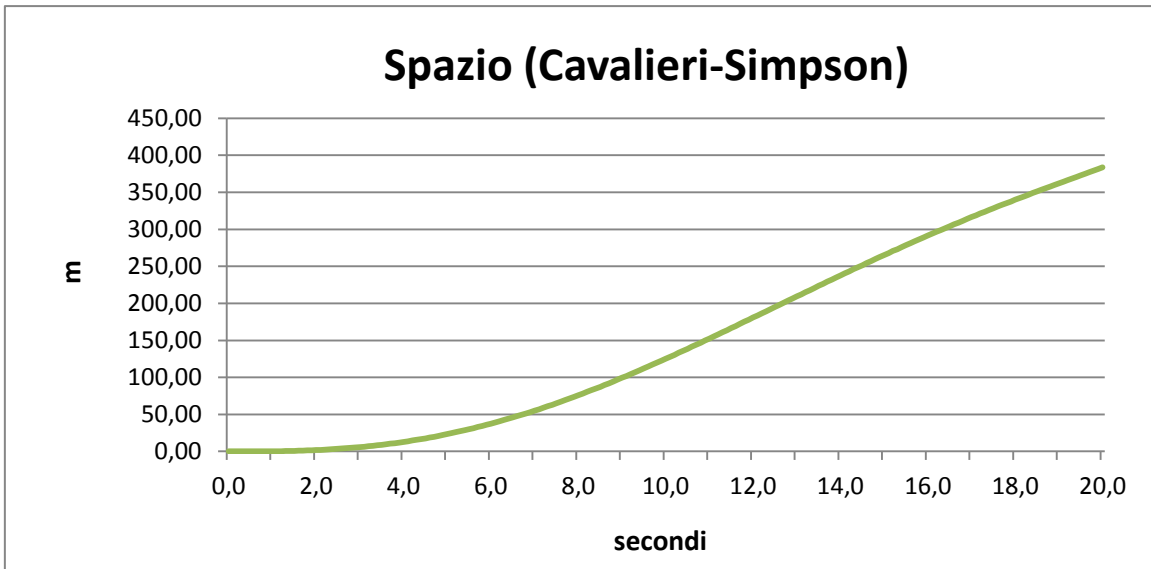
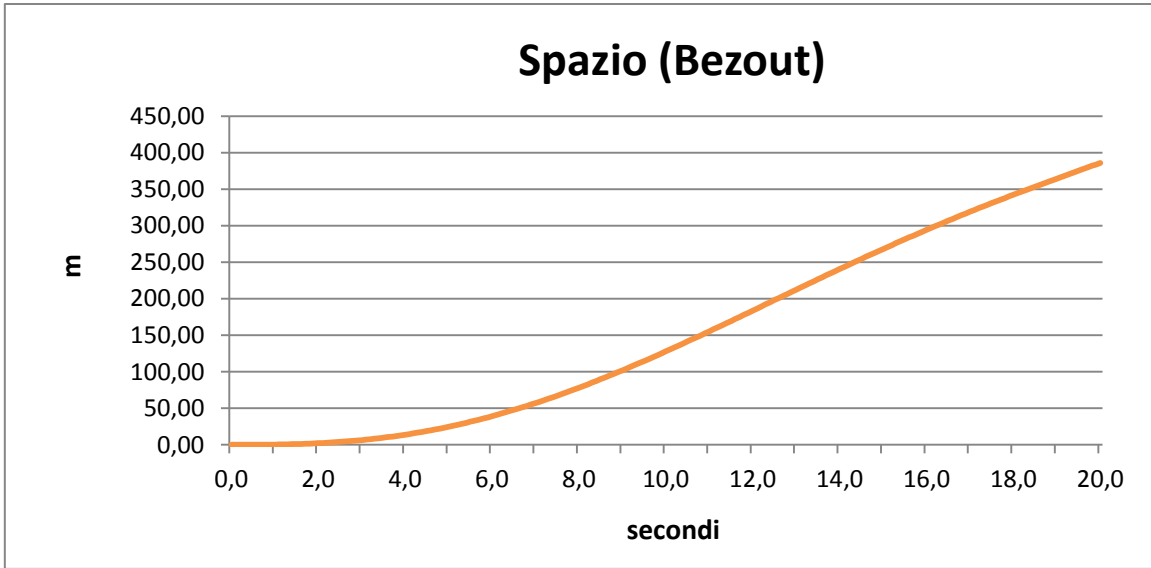
m	A	B	C	t_1	t_2	t_3
50 kg	$0,32 \text{ N s}^{-3}$	$-10,4 \text{ N s}^{-2}$	80 N s^{-1}	5 s	14 s	20 s

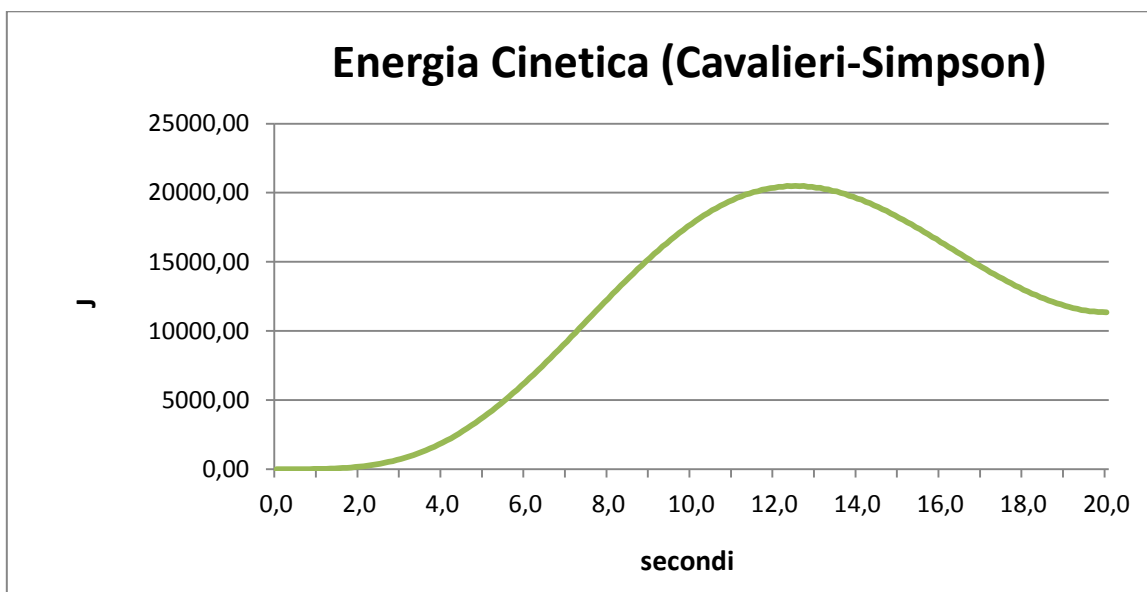
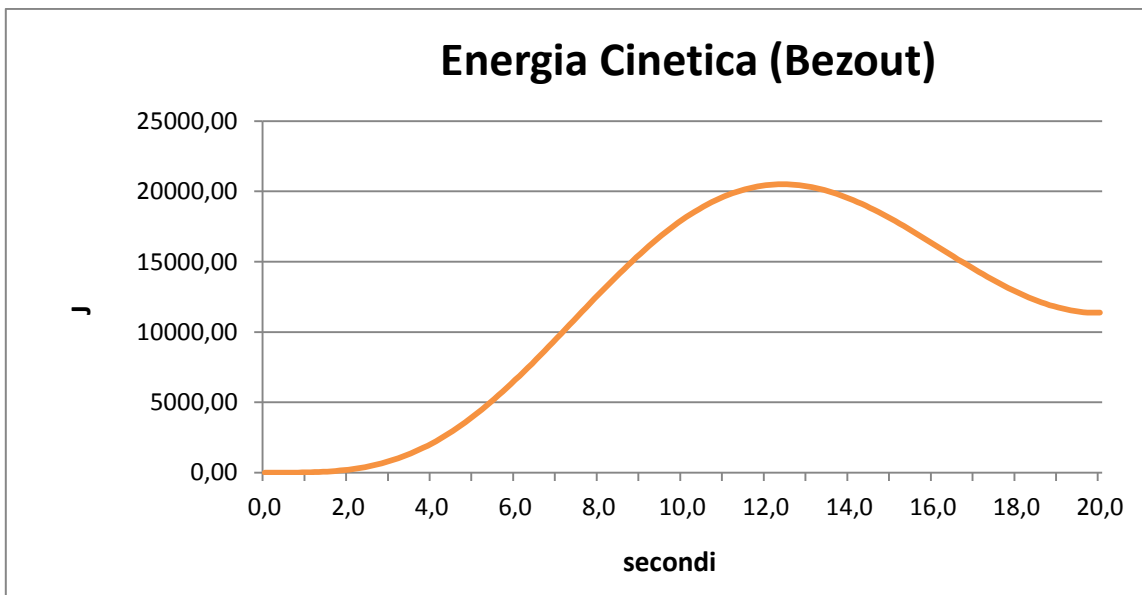
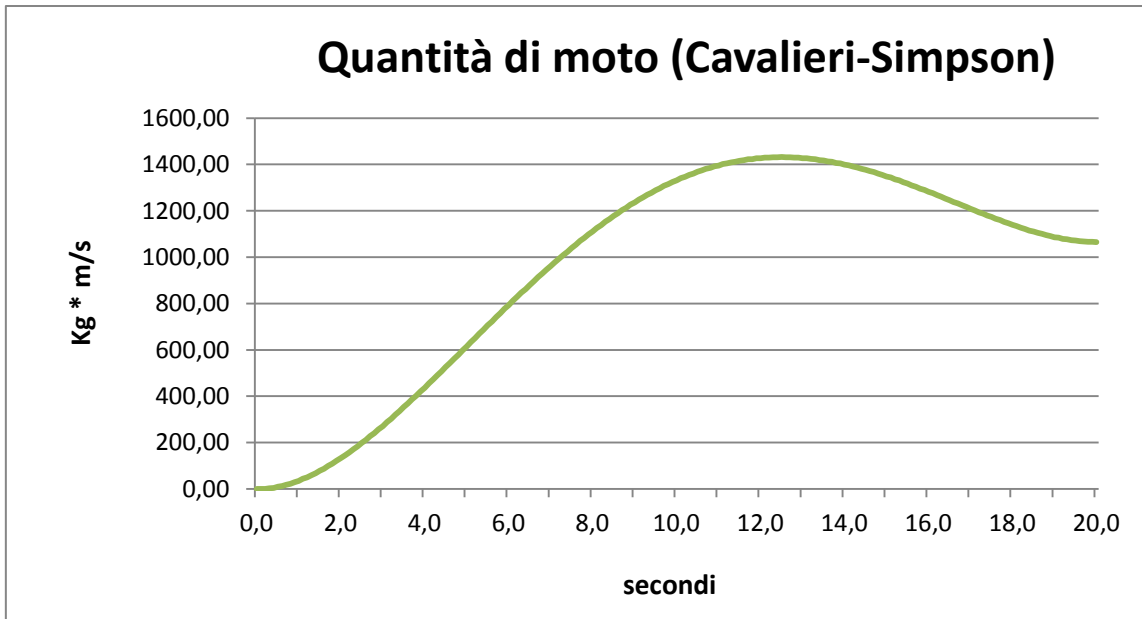
Diagrammi della forza F e dell'accelerazione a.

Integrazione numerica: Bezout e Cavalieri-Simpson

Si ricavano i diagrammi della velocità, della quantità di moto, dell'energia cinetica e dello spazio mediante le formule di integrazione numerica iterativa di Bezout e Cavalieri-Simpson:







t	F	a	Via analitica				Formola di Bezout				Formola di Cavalieri Simpson			
			v	q	E	s	v	q	E	s	v	q	E	s
0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	7,90	0,16	0,01	0,40	0,00	0,00	0,02	1,17	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,2	15,59	0,31	0,03	1,57	0,02	0,00	0,06	3,11	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,3	23,07	0,46	0,07	3,51	0,12	0,01	0,12	5,78	0,33	0,01	0,06	3,11	0,10	0,00
0,4	30,36	0,61	0,12	6,18	0,38	0,02	0,18	9,17	0,84	0,03	0,09	4,61	0,21	0,01
0,5	37,44	0,75	0,19	9,57	0,92	0,03	0,27	13,26	1,76	0,05	0,18	9,18	0,84	0,02
0,6	44,33	0,89	0,27	13,66	1,87	0,06	0,36	18,02	3,25	0,08	0,24	12,09	1,46	0,05
0,7	51,01	1,02	0,37	18,43	3,40	0,09	0,47	23,45	5,50	0,12	0,36	18,03	3,25	0,07
0,8	57,51	1,15	0,48	23,86	5,69	0,13	0,59	29,52	8,71	0,18	0,45	22,29	4,97	0,12
0,9	63,81	1,28	0,60	29,93	8,96	0,18	0,72	36,20	13,11	0,24	0,59	29,53	8,72	0,16
1,0	69,92	1,40	0,73	36,61	13,41	0,25	0,87	43,49	18,91	0,32	0,70	35,04	12,28	0,23
1,1	75,84	1,52	0,88	43,90	19,27	0,33	1,03	51,36	26,38	0,42	0,87	43,51	18,93	0,31
1,2	81,58	1,63	1,04	51,78	26,81	0,43	1,20	59,80	35,76	0,53	1,00	50,20	25,20	0,41
1,3	87,13	1,74	1,20	60,21	36,26	0,54	1,38	68,78	47,30	0,66	1,20	59,82	35,78	0,51
1,4	92,49	1,85	1,38	69,19	47,88	0,67	1,57	78,29	61,29	0,80	1,35	67,62	45,73	0,65
1,5	97,68	1,95	1,57	78,71	61,94	0,81	1,77	88,30	77,98	0,97	1,57	78,31	61,32	0,78
1,6	102,69	2,05	1,77	88,72	78,72	0,98	1,98	98,81	97,64	1,16	1,74	87,15	75,96	0,96
1,7	107,52	2,15	1,98	99,24	98,48	1,17	2,20	109,80	120,56	1,37	1,98	98,84	97,69	1,13
1,8	112,17	2,24	2,20	110,22	121,49	1,38	2,42	121,24	146,99	1,60	2,17	108,65	118,05	1,35
1,9	116,65	2,33	2,43	121,66	148,02	1,61	2,66	133,12	177,21	1,85	2,43	121,27	147,06	1,57
2,0	120,96	2,42	2,67	133,55	178,35	1,87	2,91	145,42	211,48	2,13	2,64	131,97	174,17	1,84
2,1	125,10	2,50	2,92	145,85	212,73	2,15	3,16	158,13	250,06	2,43	2,91	145,45	211,57	2,10
2,2	129,07	2,58	3,17	158,56	251,42	2,45	3,42	171,23	293,19	2,76	3,14	156,99	246,45	2,42
2,3	132,88	2,66	3,43	171,66	294,67	2,78	3,69	184,70	341,14	3,12	3,43	171,26	293,31	2,73
2,4	136,52	2,73	3,70	185,13	342,73	3,14	3,97	198,53	394,12	3,50	3,67	183,56	336,94	3,10
2,5	140,00	2,80	3,98	198,96	395,84	3,52	4,25	212,69	452,38	3,91	3,97	198,56	394,27	3,46
2,6	143,32	2,87	4,26	213,13	454,23	3,93	4,54	227,18	516,11	4,35	4,23	211,55	447,55	3,89
2,7	146,48	2,93	4,55	227,62	518,10	4,37	4,84	241,98	585,54	4,82	4,54	227,22	516,29	4,31
2,8	149,49	2,99	4,85	242,42	587,66	4,84	5,14	257,07	660,86	5,32	4,82	240,84	580,06	4,80
2,9	152,34	3,05	5,15	257,51	663,11	5,34	5,45	272,44	742,24	5,85	5,14	257,11	661,07	5,28
3,0	155,04	3,10	5,46	272,88	744,63	5,87	5,76	288,07	829,85	6,41	5,43	271,31	736,08	5,83
3,1	157,59	3,15	5,77	288,51	832,40	6,44	6,08	303,95	923,86	7,00	5,76	288,12	830,11	6,36
3,2	159,99	3,20	6,09	304,39	926,55	7,03	6,40	320,06	1024,40	7,63	6,06	302,82	917,00	6,98
3,3	162,24	3,24	6,41	320,51	1027,24	7,65	6,73	336,39	1131,60	8,28	6,40	320,11	1024,70	7,58
3,4	164,35	3,29	6,74	336,84	1134,59	8,31	7,06	352,93	1245,57	8,97	6,71	335,26	1124,02	8,26
3,5	166,32	3,33	7,07	353,37	1248,72	9,00	7,39	369,65	1366,41	9,70	7,06	352,98	1245,91	8,92
3,6	168,15	3,36	7,40	370,10	1369,71	9,72	7,73	386,55	1494,20	10,45	7,37	368,52	1358,10	9,67
3,7	169,83	3,40	7,74	387,00	1497,66	10,48	8,07	403,61	1629,00	11,24	7,73	386,60	1494,59	10,40
3,8	171,38	3,43	8,08	404,06	1632,63	11,27	8,42	420,82	1770,88	12,07	8,05	402,49	1619,95	11,21
3,9	172,80	3,46	8,43	421,27	1774,67	12,10	8,76	438,16	1919,86	12,93	8,42	420,87	1771,33	12,01
4,0	174,08	3,48	8,77	438,61	1923,82	12,96	9,11	455,63	2075,96	13,82	8,74	437,04	1910,05	12,89
4,1	175,23	3,50	9,12	456,08	2080,09	13,85	9,46	473,20	2239,20	14,75	9,11	455,68	2076,47	13,76
4,2	176,25	3,53	9,47	473,66	2243,49	14,78	9,82	490,87	2409,55	15,71	9,44	472,08	2228,62	14,72
4,3	177,15	3,54	9,83	491,33	2414,01	15,75	10,17	508,62	2586,99	16,71	9,82	490,93	2410,12	15,65
4,4	177,91	3,56	10,18	509,08	2591,63	16,75	10,53	526,45	2771,48	17,75	10,15	507,51	2575,64	16,68
4,5	178,56	3,57	10,54	526,91	2776,29	17,78	10,89	544,33	2962,96	18,82	10,53	526,51	2772,11	17,68
4,6	179,08	3,58	10,90	544,79	2967,94	18,85	11,25	562,26	3161,35	19,92	10,86	543,22	2950,83	18,78
4,7	179,49	3,59	11,25	562,72	3166,51	19,96	11,60	580,22	3366,58	21,07	11,25	562,32	3162,05	19,85
4,8	179,77	3,60	11,61	580,68	3371,91	21,11	11,96	598,21	3578,53	22,24	11,58	579,11	3353,68	21,03
4,9	179,94	3,60	11,97	598,67	3584,04	22,28	12,32	616,21	3797,09	23,46	11,97	598,27	3579,29	22,17
5,0	180,00	3,60	12,33	616,67	3802,78	23,50	12,68	634,20	4022,13	24,71	12,30	615,09	3783,41	23,42
5,1	179,94	3,60	12,69	634,66	4027,99	24,75	13,04	652,19	4253,50	26,00	12,69	634,27	4022,96	24,63
5,2	179,78	3,60	13,05	652,65	4259,54	26,04	13,40	670,15	4491,05	27,32	13,02	651,08	4239,04	25,96
5,3	179,50	3,59	13,41	670,62	4497,27	27,36	13,76	688,08	4734,60	28,68	13,40	670,22	4491,95	27,24
5,4	179,12	3,58	13,77	688,55	4741,00	28,72	14,12	705,97	4983,97	30,07	13,74	686,98	4719,37	28,64
5,5	178,64	3,57	14,13	706,44	4990,55	30,12	14,48	723,81	5238,97	31,50	14,12	706,04	4984,95	29,99

5,6	178,05	3,56	14,49	724,27	5245,73	31,55	14,83	741,58	5499,38	32,97	14,45	722,70	5222,97	31,46
5,7	177,37	3,55	14,84	742,05	5506,32	33,01	15,19	759,28	5764,99	34,47	14,83	741,65	5500,43	32,88
5,8	176,58	3,53	15,19	759,74	5772,10	34,51	15,54	776,89	6035,57	36,00	15,16	758,17	5748,24	34,42
5,9	175,70	3,51	15,55	777,36	6042,86	36,05	15,89	794,41	6310,87	37,57	15,54	776,96	6036,70	35,91
6,0	174,72	3,49	15,90	794,88	6318,34	37,62	16,24	811,83	6590,65	39,18	15,87	793,31	6293,37	37,53
6,1	173,65	3,47	16,25	812,30	6598,30	39,23	16,58	829,14	6874,66	40,82	16,24	811,90	6591,86	39,09
6,2	172,49	3,45	16,59	829,61	6882,48	40,87	16,93	846,32	7162,61	42,50	16,56	828,03	6856,41	40,78
6,3	171,24	3,42	16,94	846,79	7170,60	42,55	17,27	863,38	7454,23	44,21	16,93	846,40	7163,89	42,40
6,4	169,90	3,40	17,28	863,85	7462,40	44,26	17,61	880,30	7749,25	45,95	17,25	862,28	7435,26	44,16
6,5	168,48	3,37	17,62	880,77	7757,59	46,01	17,94	897,07	8047,36	47,73	17,61	880,38	7750,60	45,85
6,6	166,97	3,34	17,95	897,55	8055,87	47,78	18,27	913,69	8348,27	49,54	17,92	895,97	8027,67	47,68
6,7	165,39	3,31	18,28	914,16	8356,96	49,60	18,60	930,14	8651,69	51,38	18,28	913,77	8349,71	49,44
6,8	163,72	3,27	18,61	930,62	8660,54	51,44	18,93	946,43	8957,29	53,26	18,58	929,05	8631,30	51,33
6,9	161,98	3,24	18,94	946,91	8966,31	53,32	19,25	962,54	9264,76	55,17	18,93	946,51	8958,80	53,16
7,0	160,16	3,20	19,26	963,01	9273,95	55,23	19,57	978,46	9573,80	57,11	19,23	961,44	9243,69	55,12
7,1	158,27	3,17	19,58	978,94	9583,14	57,17	19,88	994,19	9884,06	59,08	19,57	978,54	9575,38	57,00
7,2	156,30	3,13	19,89	994,66	9893,57	59,14	20,19	1009,71	10195,24	61,09	19,86	993,09	9862,32	59,03
7,3	154,27	3,09	20,20	1010,19	10204,91	61,15	20,50	1025,04	10507,00	63,12	20,20	1009,80	10196,90	60,98
7,4	152,17	3,04	20,51	1025,52	10516,83	63,18	20,80	1040,15	10819,02	65,18	20,48	1023,94	10484,61	63,07
7,5	150,00	3,00	20,81	1040,63	10829,00	65,25	21,10	1055,03	11130,96	67,28	20,80	1040,23	10820,75	65,08
7,6	147,77	2,96	21,11	1055,51	11141,10	67,35	21,39	1069,70	11442,49	69,40	21,08	1053,94	11107,93	67,23
7,7	145,47	2,91	21,40	1070,18	11452,78	69,47	21,68	1084,13	11753,28	71,56	21,40	1069,78	11444,29	69,29
7,8	143,12	2,86	21,69	1084,61	11763,72	71,63	21,97	1098,32	12063,00	73,74	21,66	1083,03	11729,64	71,50
7,9	140,71	2,81	21,98	1098,80	12073,59	73,81	22,25	1112,26	12371,32	75,95	21,97	1098,40	12064,87	73,63
8,0	138,24	2,76	22,25	1112,75	12382,05	76,02	22,52	1125,96	12677,91	78,19	22,22	1111,17	12347,08	75,90
8,1	135,72	2,71	22,53	1126,44	12688,78	78,26	22,79	1139,41	12982,44	80,46	22,52	1126,05	12679,85	78,07
8,2	133,14	2,66	22,80	1139,89	12993,45	80,53	23,05	1152,59	13284,59	82,75	22,77	1138,32	12957,63	80,40
8,3	130,52	2,61	23,06	1153,07	13295,74	82,82	23,31	1165,51	13584,04	85,07	23,05	1152,68	13286,60	82,63
8,4	127,84	2,56	23,32	1165,99	13595,32	85,14	23,56	1178,15	13880,47	87,41	23,29	1164,42	13558,68	85,01
8,5	125,12	2,50	23,57	1178,64	13891,88	87,48	23,81	1190,53	14173,56	89,78	23,56	1178,24	13882,54	87,29
8,6	122,35	2,45	23,82	1191,01	14185,11	89,85	24,05	1202,62	14463,01	92,17	23,79	1189,44	14147,68	89,72
8,7	119,54	2,39	24,06	1203,11	14474,68	92,25	24,29	1214,43	14748,51	94,59	24,05	1202,71	14465,14	92,04
8,8	116,70	2,33	24,30	1214,92	14760,31	94,67	24,52	1225,96	15029,77	97,03	24,27	1213,35	14722,12	94,53
8,9	113,81	2,28	24,53	1226,45	15041,68	97,11	24,74	1237,19	15306,49	99,49	24,52	1226,05	15031,96	96,90
9,0	110,88	2,22	24,75	1237,68	15318,52	99,57	24,96	1248,13	15578,38	101,98	24,72	1236,11	15279,62	99,43
9,1	107,92	2,16	24,97	1248,62	15590,52	102,06	25,18	1258,78	15845,17	104,48	24,96	1248,22	15580,62	101,85
9,2	104,92	2,10	25,19	1259,26	15857,42	104,57	25,38	1269,12	16106,58	107,01	25,15	1257,69	15817,85	104,42
9,3	101,90	2,04	25,39	1269,60	16118,94	107,09	25,58	1279,15	16362,36	109,56	25,38	1269,21	16108,88	106,88
9,4	98,84	1,98	25,59	1279,64	16374,82	109,64	25,78	1288,88	16612,23	112,13	25,56	1278,07	16334,60	109,50
9,5	95,76	1,92	25,79	1289,37	16624,79	112,21	25,97	1298,30	16855,96	114,72	25,78	1288,98	16614,57	111,99
9,6	92,65	1,85	25,98	1298,79	16868,62	114,80	26,15	1307,41	17093,30	117,32	25,94	1297,22	16827,80	114,65
9,7	89,52	1,79	26,16	1307,90	17106,06	117,41	26,32	1316,21	17324,03	119,94	26,15	1307,50	17095,68	117,18
9,8	86,37	1,73	26,33	1316,70	17336,87	120,03	26,49	1324,69	17547,92	122,59	26,30	1315,12	17295,49	119,88
9,9	83,19	1,66	26,50	1325,17	17560,85	122,67	26,66	1332,85	17764,76	125,24	26,50	1324,78	17550,34	122,44
10,0	80,00	1,60	26,67	1333,33	17777,78	125,33	26,81	1340,68	17974,36	127,92	26,64	1331,76	17735,87	125,18
10,1	76,79	1,54	26,82	1341,17	17987,45	128,01	26,96	1348,20	18176,51	130,61	26,82	1340,78	17976,82	127,77
10,2	73,57	1,47	26,97	1348,69	18189,68	130,70	27,11	1355,40	18371,05	133,31	26,94	1347,12	18147,29	130,54
10,3	70,34	1,41	27,12	1355,89	18384,29	133,40	27,25	1362,27	18557,79	136,03	27,11	1355,49	18373,54	133,16
10,4	67,09	1,34	27,26	1362,76	18571,10	136,12	27,38	1368,82	18736,58	138,76	27,22	1361,19	18528,27	135,96
10,5	63,84	1,28	27,39	1369,31	18749,96	138,85	27,50	1375,04	18907,28	141,50	27,38	1368,91	18739,10	138,61
10,6	60,58	1,21	27,51	1375,53	18920,72	141,60	27,62	1380,93	19069,74	144,26	27,48	1373,95	18877,49	141,43
10,7	57,32	1,15	27,63	1381,42	19083,24	144,36	27,73	1386,50	19223,85	147,02	27,62	1381,02	19072,29	144,10
10,8	54,05	1,08	27,74	1386,99	19237,40	147,12	27,83	1391,74	19369,48	149,80	27,71	1385,42	19193,81	146,95
10,9	50,79	1,02	27,84	1392,23	19383,08	149,90	27,93	1396,66	19506,54	152,59	27,84	1391,83	19372,04	149,65
11,0	47,52	0,95	27,94	1397,15	19520,19	152,69	28,02	1401,25	19634,93	155,39	27,91	1395,57	19476,28	152,52
11,1	44,26	0,89	28,03	1401,74	19648,62	155,49	28,11	1405,51	19754,58	158,20	28,03	1401,34	19637,51	155,23
11,2	41,00	0,82	28,12	1406,00	19768,32	158,30	28,19	1409,45	19865,42	161,01	28,09	1404,43	19724,12	158,12
11,3	37,75	0,76	28,20	1409,94	19879,19	161,12	28,26	1413,06	19967,40	163,83	28,19	1409,54	19868,01	160,85

11,4	34,51	0,69	28,27	1413,55	19981,21	163,94	28,33	1416,35	20060,47	166,66	28,24	1411,98	19936,78	163,76
11,5	31,28	0,63	28,34	1416,84	20074,31	166,77	28,39	1419,32	20144,61	169,50	28,33	1416,44	20063,07	166,50
11,6	28,06	0,56	28,40	1419,81	20158,47	169,61	28,44	1421,96	20219,80	172,34	28,36	1418,23	20113,85	169,42
11,7	24,86	0,50	28,45	1422,45	20233,68	172,45	28,49	1424,29	20286,02	175,19	28,44	1422,05	20222,40	172,17
11,8	21,67	0,43	28,50	1424,78	20299,92	175,30	28,53	1426,30	20343,29	178,04	28,46	1423,21	20255,14	175,11
11,9	18,51	0,37	28,54	1426,79	20357,21	178,15	28,56	1427,99	20391,62	180,89	28,53	1426,39	20345,89	177,87
12,0	15,36	0,31	28,57	1428,48	20405,55	181,00	28,59	1429,37	20431,05	183,75	28,54	1426,91	20360,65	180,81
12,1	12,24	0,24	28,60	1429,86	20444,98	183,86	28,61	1430,44	20461,61	186,61	28,59	1429,46	20433,65	183,58
12,2	9,14	0,18	28,62	1430,93	20475,55	186,72	28,62	1431,20	20483,35	189,47	28,59	1429,36	20430,57	186,53
12,3	6,06	0,12	28,63	1431,69	20497,29	189,58	28,63	1431,65	20496,34	192,33	28,63	1431,29	20485,94	189,30
12,4	3,02	0,06	28,64	1432,14	20510,28	192,45	28,64	1431,81	20500,66	195,20	28,61	1430,57	20465,27	192,25
12,5	0,00	0,00	28,65	1432,29	20514,59	195,31	28,63	1431,66	20496,39	198,06	28,64	1431,90	20503,24	195,02
12,6	-2,98	-0,06	28,64	1432,14	20510,31	198,18	28,62	1431,21	20483,62	200,92	28,61	1430,57	20465,30	197,98
12,7	-5,93	-0,12	28,63	1431,70	20497,54	201,04	28,61	1430,47	20462,48	203,78	28,63	1431,30	20486,18	200,74
12,8	-8,85	-0,18	28,62	1430,96	20476,37	203,90	28,59	1429,44	20433,06	206,64	28,59	1429,38	20431,40	203,70
12,9	-11,72	-0,23	28,60	1429,93	20446,94	206,76	28,56	1428,13	20395,51	209,50	28,59	1429,53	20435,60	206,46
13,0	-14,56	-0,29	28,57	1428,61	20409,36	209,62	28,53	1426,53	20349,95	212,36	28,54	1427,04	20364,46	209,42
13,1	-17,35	-0,35	28,54	1427,02	20363,78	212,48	28,49	1424,66	20296,55	215,21	28,53	1426,62	20352,47	212,17
13,2	-20,11	-0,40	28,50	1425,14	20310,35	215,33	28,45	1422,51	20235,45	218,05	28,47	1423,57	20265,56	215,12
13,3	-22,81	-0,46	28,46	1423,00	20249,22	218,18	28,40	1420,10	20166,83	220,90	28,45	1422,60	20237,93	217,87
13,4	-25,47	-0,51	28,41	1420,58	20180,56	221,02	28,35	1417,42	20090,85	223,74	28,38	1419,01	20135,91	220,81
13,5	-28,08	-0,56	28,36	1417,91	20104,55	223,86	28,29	1414,49	20007,71	226,57	28,35	1417,51	20093,30	223,54
13,6	-30,64	-0,61	28,30	1414,97	20021,36	226,69	28,23	1411,30	19917,59	229,39	28,27	1413,40	19976,89	226,48
13,7	-33,14	-0,66	28,24	1411,78	19931,20	229,52	28,16	1407,86	19820,70	232,21	28,23	1411,38	19920,01	229,20
13,8	-35,59	-0,71	28,17	1408,34	19834,27	232,34	28,08	1404,18	19717,25	235,02	28,14	1406,77	19790,00	232,12
13,9	-37,99	-0,76	28,09	1404,66	19730,77	235,15	28,01	1400,27	19607,45	237,83	28,09	1404,27	19719,63	234,83
14,0	-40,32	-0,81	28,01	1400,75	19620,91	237,96	27,92	1396,12	19491,52	240,62	27,98	1399,17	19576,89	237,74
14,1	-42,59	-0,85	27,93	1396,60	19504,93	240,76	27,84	1391,75	19369,69	243,41	27,92	1396,20	19493,85	240,43
14,2	-44,80	-0,90	27,84	1392,23	19383,05	243,55	27,74	1387,16	19242,21	246,19	27,81	1390,66	19339,29	243,32
14,3	-46,95	-0,94	27,75	1387,64	19255,50	246,33	27,65	1382,36	19109,30	248,96	27,74	1387,25	19244,50	245,99
14,4	-49,03	-0,98	27,66	1382,84	19122,53	249,10	27,55	1377,36	18971,22	251,72	27,63	1381,27	19079,07	248,87
14,5	-51,04	-1,02	27,56	1377,84	18984,38	251,86	27,44	1372,16	18828,21	254,47	27,55	1377,44	18973,46	251,52
14,6	-52,98	-1,06	27,45	1372,64	18841,32	254,61	27,34	1366,77	18680,55	257,21	27,42	1371,06	18798,17	254,38
14,7	-54,85	-1,10	27,34	1367,24	18693,58	257,35	27,22	1361,19	18528,47	259,94	27,34	1366,85	18682,74	257,00
14,8	-56,64	-1,13	27,23	1361,67	18541,44	260,08	27,11	1355,44	18372,26	262,65	27,20	1360,10	18498,64	259,84
14,9	-58,36	-1,17	27,12	1355,92	18385,15	262,79	26,99	1349,53	18212,18	265,36	27,11	1355,52	18374,40	262,44
15,0	-60,00	-1,20	27,00	1350,00	18225,00	265,50	26,87	1343,45	18048,50	268,05	26,97	1348,43	18182,57	265,26
15,1	-61,56	-1,23	26,88	1343,92	18061,25	268,19	26,74	1337,22	17881,50	270,73	26,87	1343,52	18050,59	267,84
15,2	-63,04	-1,26	26,75	1337,69	17894,17	270,88	26,62	1330,84	17711,45	273,40	26,72	1336,12	17852,12	270,64
15,3	-64,43	-1,29	26,63	1331,32	17724,04	273,54	26,49	1324,34	17538,64	276,06	26,62	1330,92	17713,48	273,19
15,4	-65,74	-1,31	26,50	1324,81	17551,15	276,20	26,35	1317,70	17363,34	278,70	26,46	1323,23	17509,51	275,96
15,5	-66,96	-1,34	26,36	1318,17	17375,77	278,84	26,22	1310,95	17185,84	281,33	26,36	1317,78	17365,31	278,48
15,6	-68,09	-1,36	26,23	1311,42	17198,18	281,47	26,08	1304,09	17006,42	283,94	26,20	1309,85	17156,96	281,23
15,7	-69,13	-1,38	26,09	1304,56	17018,68	284,09	25,94	1297,13	16825,37	286,54	26,08	1304,16	17008,33	283,72
15,8	-70,08	-1,40	25,95	1297,60	16837,54	286,69	25,80	1290,08	16642,97	289,13	25,92	1296,02	16796,76	286,44
15,9	-70,93	-1,42	25,81	1290,54	16655,05	289,28	25,66	1282,95	16459,50	291,70	25,80	1290,15	16644,82	288,91
16,0	-71,68	-1,43	25,67	1283,41	16471,50	291,85	25,51	1275,75	16275,26	294,26	25,64	1281,84	16431,16	291,60
16,1	-72,33	-1,45	25,52	1276,21	16287,17	294,41	25,37	1268,48	16090,52	296,81	25,52	1275,82	16277,05	294,04
16,2	-72,89	-1,46	25,38	1268,95	16102,34	296,96	25,22	1261,17	15905,57	299,34	25,35	1267,38	16062,46	296,70
16,3	-73,34	-1,47	25,23	1261,64	15917,30	299,49	25,08	1253,82	15720,70	301,85	25,22	1261,24	15907,30	299,11
16,4	-73,68	-1,47	25,09	1254,29	15732,33	302,00	24,93	1246,44	15536,18	304,35	25,05	1252,71	15692,91	301,75
16,5	-73,92	-1,48	24,94	1246,91	15547,72	304,51	24,78	1239,04	15352,29	306,84	24,93	1246,51	15537,83	304,12
16,6	-74,05	-1,48	24,79	1239,51	15363,74	306,99	24,63	1231,64	15169,31	309,31	24,76	1237,93	15324,79	306,73
16,7	-74,07	-1,48	24,64	1232,10	15180,68	309,46	24,48	1224,24	14987,53	311,76	24,63	1231,70	15170,91	309,07
16,8	-73,97	-1,48	24,49	1224,70	14998,80	311,92	24,34	1216,85	14807,21	314,20	24,46	1223,12	14960,31	311,66
16,9	-73,77	-1,48	24,35	1217,31	14818,39	314,36	24,19	1209,49	14628,62	316,63	24,34	1216,91	14808,73	313,97
17,0	-73,44	-1,47	24,20	1209,95	14639,71	316,79	24,04	1202,17	14452,04	319,04	24,17	1208,37	14601,68	316,52
17,1	-73,00	-1,46	24,05	1202,62	14463,04	319,20	23,90	1194,90	14277,74	321,44	24,04	1202,23	14453,50	318,80

17,2	-72,43	-1,45	23,91	1195,35	14288,65	321,60	23,75	1187,69	14105,98	323,82	23,88	1193,78	14251,08	321,33
17,3	-71,75	-1,43	23,76	1188,14	14116,80	323,98	23,61	1180,55	13937,03	326,19	23,75	1187,74	14107,38	323,58
17,4	-70,94	-1,42	23,62	1181,01	13947,76	326,35	23,47	1173,51	13771,14	328,54	23,59	1179,43	13910,64	326,08
17,5	-70,00	-1,40	23,48	1173,96	13781,78	328,71	23,33	1166,56	13608,59	330,88	23,47	1173,56	13772,47	328,30
17,6	-68,94	-1,38	23,34	1167,01	13619,13	331,05	23,19	1159,72	13449,61	333,21	23,31	1165,44	13582,46	330,77
17,7	-67,74	-1,35	23,20	1160,18	13460,07	333,38	23,06	1153,02	13294,48	335,52	23,20	1159,78	13450,87	332,96
17,8	-66,42	-1,33	23,07	1153,47	13304,85	335,69	22,93	1146,45	13143,43	337,82	23,04	1151,89	13268,60	335,41
17,9	-64,96	-1,30	22,94	1146,90	13153,73	337,99	22,80	1140,03	12996,74	340,11	22,93	1146,50	13144,63	337,57
18,0	-63,36	-1,27	22,81	1140,48	13006,95	340,28	22,68	1133,78	12854,64	342,38	22,78	1138,91	12971,11	339,99
18,1	-61,63	-1,23	22,68	1134,23	12864,77	342,55	22,55	1127,71	12717,39	344,64	22,68	1133,83	12855,77	342,13
18,2	-59,75	-1,20	22,56	1128,16	12727,43	344,81	22,44	1121,84	12585,23	346,89	22,53	1126,59	12691,98	344,53
18,3	-57,74	-1,15	22,45	1122,28	12595,20	347,07	22,32	1116,17	12458,42	349,13	22,44	1121,89	12586,30	346,64
18,4	-55,58	-1,11	22,33	1116,62	12468,31	349,30	22,21	1110,73	12337,21	351,36	22,30	1115,04	12433,22	349,01
18,5	-53,28	-1,07	22,22	1111,17	12347,02	351,53	22,11	1105,52	12221,84	353,57	22,22	1110,78	12338,21	351,10
18,6	-50,83	-1,02	22,12	1105,96	12231,58	353,75	22,01	1100,57	12112,57	355,78	22,09	1104,39	12196,83	353,46
18,7	-48,23	-0,96	22,02	1101,01	12122,24	355,96	21,92	1095,89	12009,66	357,98	22,01	1100,61	12113,51	355,52
18,8	-45,48	-0,91	21,93	1096,32	12019,26	358,15	21,83	1091,48	11913,35	360,16	21,90	1094,75	11984,81	357,86
18,9	-42,58	-0,85	21,84	1091,92	11922,88	360,34	21,75	1087,38	11823,91	362,34	21,83	1091,52	11914,22	359,90
19,0	-39,52	-0,79	21,76	1087,81	11833,38	362,52	21,67	1083,59	11741,60	364,51	21,72	1086,24	11799,19	362,22
19,1	-36,31	-0,73	21,68	1084,02	11751,01	364,69	21,60	1080,12	11666,70	366,68	21,67	1083,62	11742,41	364,24
19,2	-32,93	-0,66	21,61	1080,56	11676,05	366,86	21,54	1077,01	11599,47	368,84	21,58	1078,99	11642,09	366,56
19,3	-29,40	-0,59	21,55	1077,44	11608,76	369,02	21,49	1074,25	11540,20	370,99	21,54	1077,04	11600,22	368,56
19,4	-25,70	-0,51	21,49	1074,68	11549,44	371,17	21,44	1071,88	11489,19	373,13	21,46	1073,11	11515,67	370,86
19,5	-21,84	-0,44	21,45	1072,31	11498,38	373,31	21,40	1069,89	11446,73	375,27	21,44	1071,91	11489,88	372,86
19,6	-17,81	-0,36	21,41	1070,32	11455,87	375,46	21,37	1068,32	11413,13	377,41	21,37	1068,75	11422,24	375,15
19,7	-13,62	-0,27	21,37	1068,75	11422,23	377,60	21,34	1067,18	11388,71	379,55	21,37	1068,35	11413,75	377,13
19,8	-9,25	-0,19	21,35	1067,60	11397,77	379,73	21,33	1066,48	11373,81	381,68	21,32	1066,03	11364,22	379,42
19,9	-4,71	-0,09	21,34	1066,90	11382,84	381,87	21,32	1066,25	11368,79	383,81	21,33	1066,51	11374,38	381,40
20,0	0,00	0,00	21,33	1066,67	11377,78	384,00	21,32	1066,25	11368,79	385,95	21,30	1065,09	11344,26	383,69

Errori relativi della risoluzione numerica

t	Formula di Bezout				Formula di Cavalieri-Simpson			
	err . v	err . q	err . E	err . s	err . v	err . q	err . E	err . s
5	2,84%	2,84%	5,77%	5,15%	0,24%	0,26%	0,51%	0,34%
14	0,32%	0,33%	0,66%	1,12%	0,12%	0,11%	0,22%	0,09%
20	0,05%	0,04%	0,08%	0,51%	0,14%	0,15%	0,29%	0,08%

Esercitazione N.6

Lubrificazione. Cuscinetti Michell

PROBLEMA INVERSO

Si abbia una coppia prismatica lubrificata rispondente ai seguenti dati:

lunghezza della slitta mobile $l = 0.40$ m

velocità di trascinamento della slitta mobile $V = 2,4$ m s⁻¹

spessore massimo del meato $h_1 = 0.40$ mm

spessore minimo del meato $h_2 = 0.16$ mm

coefficiente di viscosità del lubrificante $\mu = 40 \cdot 10^{-3}$ N s/m² (temperatura di funzionamento)

Si costruisca il diagramma dei gradienti e dedottone, mediante integrazione numerica, quello delle pressioni, si calcoli il valore di p_{\max} . Si determini numericamente la forza risultante N per unità di larghezza e l'ascissa x_N del suo punto di applicazione. Si calcoli mediante la formula:

$$T = \frac{4}{n-1} \left(\ln n - \frac{3(n-1)}{2(n+1)} \right) \mu V \frac{l}{h_2}$$

il valore della forza tangenziale per unità di larghezza e si determini il coefficiente di attrito mediato f_m . Infine, si costruiscano i diagrammi delle velocità u delle falde fluide nelle sezioni di ascissa $x_1 = 0.15$ m, $x_2 = x_N$ ed $x_3 = 0.35$ m.

PROBLEMA DIRETTO

Un cuscinetto Michell a pattini auto-orientabili destinato ad equilibrare una spinta $P = 8000$ daN, trasmessagli da un albero rotante con velocità $n = 800$ giri/1', è costituito da otto settori. Nella ipotesi che da un dimensionamento di massima si sia pervenuti ai seguenti risultati:

raggio medio del cuscinetto $r_m = 100$ mm

lunghezza del settore sulla circonferenza media $l = 73,5$ mm

larghezza del settore $b = 60$ mm

ascissa del punto di applicazione del carico $x_N = 45$ mm

coefficiente di viscosità $\mu = 35 \cdot 10^{-3}$ Ns/m² (alla temperatura di funzionamento),

si verifichi che la lubrificazione avvenga in regime idrodinamico. Si calcoli, inoltre, la pressione media ed il coefficiente di attrito mediato e si esegua uno schizzo quotato del cuscinetto.

PROBLEMA INVERSO

Il problema inverso consiste nella determinazione della portanza N e del suo punto di applicazione x_N a partire fondamentalmente dalla conoscenza delle caratteristiche geometriche del meato.

Nel caso in esame, dunque, occorre determinare il diagramma dei gradienti, delle pressioni, la forza risultante N per unità di larghezza, il suo punto di applicazione x_N , ed infine il valore della forza tangenziale per unità di larghezza T , il coefficiente di attrito mediato f_m ed i diagrammi delle velocità u delle falde fluide nelle sezioni di ascissa x_1 , $x_2=x_N$ ed x_3 .

Diagramma dei gradienti $p'(x)$ e delle pressioni $p(x)$:

Il diagramma dei gradienti $p'(x)$ si può ricavare attraverso la seguente espressione:

$$p'(x) = 6\mu V \frac{h(x) - \bar{h}}{h^3(x)}$$

dove \bar{h} indica l'altezza del meato in corrispondenza della sezione \bar{x} ove la pressione è massima.

Per un meato a spessore variabile linearmente, dove sono noti i valori di h_1 (altezza massima all'imbocco) ed h_2 (altezza minima all'uscita), l'altezza h sarà una funzione lineare di x , la quale si può ottenere attraverso la seguente relazione di proporzionalità:

$$\frac{h_1 - h(x)}{x} = \frac{h_1 - h_2}{l}$$

$$h(x) = h_1 - \left(\frac{h_1 - h_2}{l}\right)x$$

Il termine \bar{h} può inoltre essere espresso come segue:

$$\bar{h} = 2 \frac{h_1 \cdot h_2}{h_1 + h_2} = 0,23 \text{ mm}$$

Il diagramma delle pressioni $p(x)$ può invece essere determinato a partire dal diagramma dei gradienti tramite integrazione

$$p(x) = \int p'(x) dx$$

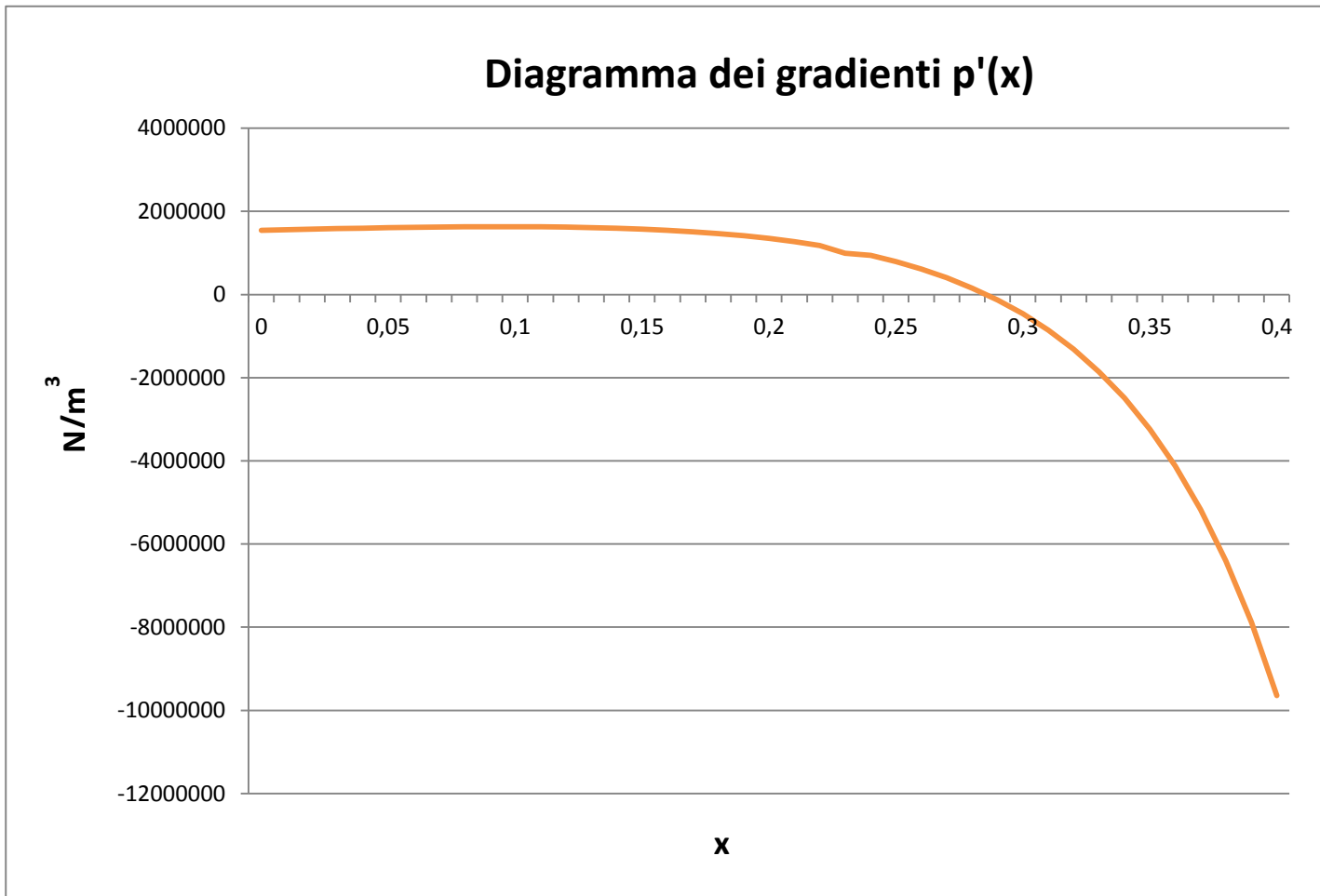
Nel nostro caso si è ricorso alla formula di integrazione numerica di Bezout:

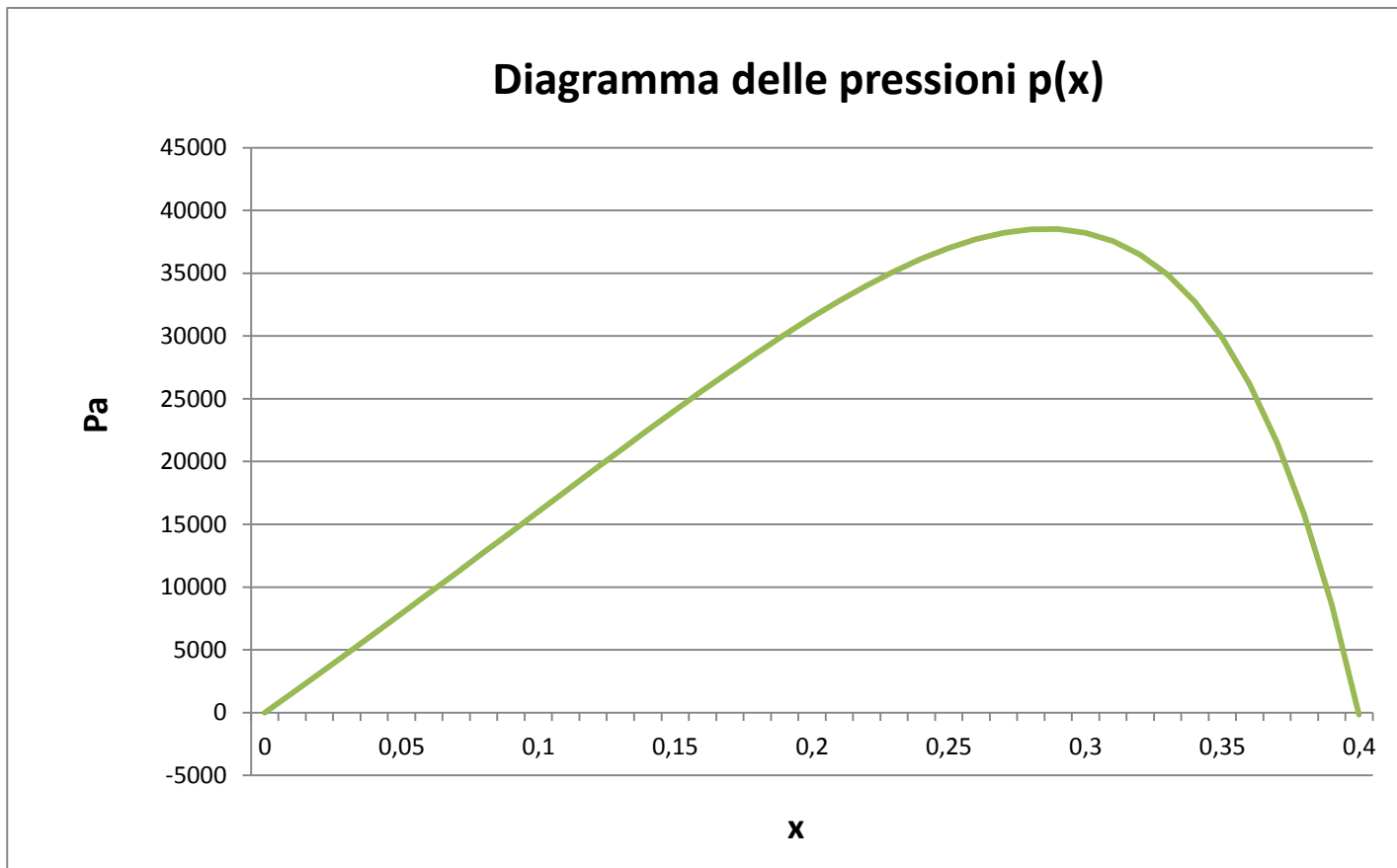
$$p_{i+1} = p_i + \Delta x \left(\frac{p'_{i+1} + p'_i}{2} \right)$$

μ	0,04	Ns/m ²
v	2,4	m/s
h	0,00023	m
h_1	0,0004	m
h_2	0,00016	m

			Formula di Bezout
x	$h(x)$	$p'(x)$	$p(x)$
0	0,0004	1542870	0
0,01	0,000394	1557931	1550,400264
0,02	0,000388	1572162	3115,446633
0,03	0,000382	1585414	4694,234721
0,04	0,000376	1597515	6285,698964
0,05	0,00037	1608270	7888,591024
0,06	0,000364	1617459	9501,455193
0,07	0,000358	1624832	11122,60036
0,08	0,000352	1630104	12750,06798
0,09	0,000346	1632951	14381,59549
0,1	0,00034	1633006	16014,57433
0,11	0,000334	1629849	17646,00183
0,12	0,000328	1623000	19272,42594
0,13	0,000322	1611912	20889,88149
0,14	0,000316	1595959	22493,81676
0,15	0,00031	1574424	24079,00847
0,16	0,000304	1546485	25639,46344
0,17	0,000298	1511196	27168,30428
0,18	0,000292	1467468	28657,63639
0,19	0,000286	1414045	30098,39284
0,2	0,00028	1349475	31480,1529
0,21	0,000274	1272077	32790,9292
0,22	0,000268	1179899	34016,91746
0,23	0,000262	1070668	35142,20122
0,24	0,000256	941734,3	36148,40258
0,25	0,00025	789995,5	37014,26749
0,26	0,000244	611813,3	37715,17192
0,27	0,000238	402905,6	38222,53138
0,28	0,000232	158216,8	38503,09259
0,29	0,000226	-128242	38518,08
0,3	0,00022	-463591	38222,16335
0,31	0,000214	-856329	37562,20315
0,32	0,000208	-1316639	36475,719
0,33	0,000202	-1856778	34889,01053
0,34	0,000196	-2491564	32714,8397
0,35	0,00019	-3239003	29849,55637
0,36	0,000184	-4121086	26169,51212
0,37	0,000178	-5164823	21526,55783
0,38	0,000172	-6403587	15742,35286
0,39	0,000166	-7878878	8601,120316
0,4	0,00016	-9642656	-159,6467957

Si riporta di seguito i diagrammi dei gradienti $p'(x)$ e delle pressioni $p(x)$.





Calcolo del valore p_{max} :

Dalla formula di integrazione numerica precedente si può ricavare il valore di p_{max} in corrispondenza dello spessore \bar{h} :

$$p_{max} = 38518,08 \text{ Pa}$$

Forza risultante N per unità di larghezza:

Il modulo della forza sustentatrice N per unità di larghezza può essere calcolata tramite:

$$N = 6 \frac{(n+1) \ln n - 2(n-1)}{(n+1)(n-1)^2} \mu V \frac{l^2}{h_2^2} = 94636.6 \text{ N}$$

dove

$$n = \frac{h_1}{h_2} = 2,5$$

Punto di applicazione x_N :

Il punto di applicazione x_N della forza sustentatrice N per unità di larghezza può essere calcolato tramite:

$$x_N = \frac{1}{2} \frac{(1 + 4n) - 5n^2 + 2n(n + 2) \ln n}{(n^2 - 1) \ln n - 2(n - 1)^2} l = 0.236 m$$

Forza tangenziale T per unità di larghezza:

Il modulo della forza tangenziale T per unità di larghezza può essere calcolata tramite:

$$T = \frac{4}{n - 1} \left(\ln n - \frac{3(n - 1)}{2(n + 1)} \right) \mu V \frac{l}{h_2} \approx 175 N$$

Coefficiente di attrito mediato f_m :

Il coefficiente di attrito mediato è pari a:

$$f_m = \frac{T}{N} = \frac{175}{94636.6} = 0.0018$$

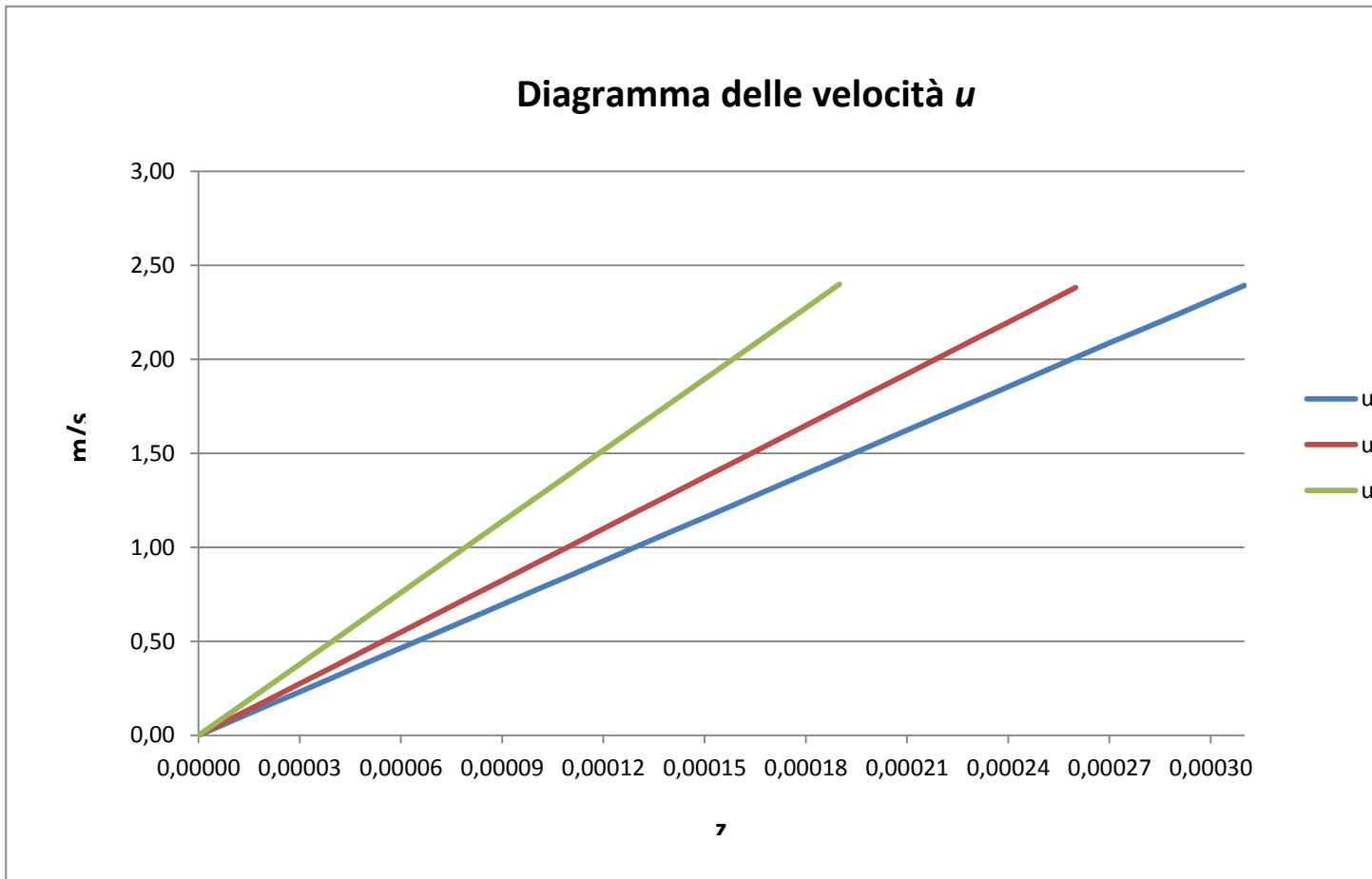
Diagrammi delle velocità u delle falde fluide nelle sezioni di ascissa x_1 , $x_2=x_N$ ed x_3 :

Attraverso la formula di Petroff si giunge alla seguente espressione per il calcolo della velocità delle falde fluide:

$$u(z, x) = \frac{V}{h(x)}z - \frac{p'(x)}{2\mu}[h(x) - z]z$$

x_1	0,15	m
x_2	0,236	m
x_3	0,35	m

z	$u(z, x_1)$	$u(z, x_2)$	$u(z, x_3)$
0,00000	0,00	0,00	0,00
0,00001	0,08	0,09	0,13
0,00002	0,15	0,18	0,25
0,00003	0,23	0,27	0,38
0,00004	0,31	0,37	0,51
0,00005	0,39	0,46	0,63
0,00006	0,46	0,55	0,76
0,00007	0,54	0,64	0,88
0,00008	0,62	0,73	1,01
0,00009	0,70	0,82	1,14
0,00010	0,77	0,92	1,26
0,00011	0,85	1,01	1,39
0,00012	0,93	1,10	1,52
0,00013	1,00	1,19	1,64
0,00014	1,08	1,28	1,77
0,00015	1,16	1,37	1,90
0,00016	1,24	1,47	2,02
0,00017	1,31	1,56	2,15
0,00018	1,39	1,65	2,27
0,00019	1,47	1,74	2,40
0,00020	1,55	1,83	
0,00021	1,62	1,92	
0,00022	1,70	2,02	
0,00023	1,78	2,11	
0,00024	1,85	2,20	
0,00025	1,93	2,29	
0,00026	2,01	2,38	
0,00027	2,09		
0,00028	2,16		
0,00029	2,24		
0,00030	2,32		
0,00031	2,39		



PROBLEMA DIRETTO

Il problema diretto consiste nella determinazione delle condizioni di funzionamento idrodinamiche per un assegnato sistema, dal quale si conoscano la geometria, il carico, la velocità di esercizio e la viscosità dell'olio.

Nel caso in esame, dunque, occorre sostanzialmente determinare i valori dell'altezza minima h_2 del meato e del coefficiente di attrito mediato f_m , che dovranno avere valori adeguati all'ipotesi di funzionamento idrodinamico.

Il cuscinetto Michell in studio è a pattini auto-orientabili, cioè il pattino è incernierato in corrispondenza di una sezione nota x_0 e cambia orientamento in modo tale che l'equilibrio sulla sua rotazione sia soddisfatto. Ciò avviene a regime quando le pressioni del fluido agenti sul pattino sono equivalenti alla risultante N applicata nella sezione $x_N = x_0$. In tal caso N e la reazione della cerniera costituiscono una coppia di braccio nullo.

La procedura che si segue per la risoluzione di questo tipo di problema è la seguente:

1. Si determina il coefficiente caratteristico n del meato a partire dalla conoscenza della sezione x_N di applicazione di N
2. Si determina l'altezza minima h_2
3. Si calcola il coefficiente di attrito mediato f_m

Forza per unità di spessore agente sul pattino:

$$N = \frac{P}{8b} = \frac{80000}{8 \cdot 0,060} = 166,667 \text{ kN/m}$$

Velocità della slitta in corrispondenza dei perni che sostengono i pattini distanti r_m dall'asse di rotazione:

$$V = \omega \cdot r_m = \frac{2\pi n}{60} \cdot r_m = 83,78 \cdot 0,1 = 8,378 \text{ m/s}$$

Calcolo del coefficiente caratteristico n del meato:

$$f(n) = \frac{x_N}{l} = \frac{0,045}{0,0735} = 0,612 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + 4n) - 5n^2 + 2n(n + 2)\ln n}{(n^2 - 1)\ln n - 2(n - 1)^2}$$

Invertendo la precedente relazione è possibile determinare il valore del coefficiente caratteristico n . Tale operazione non è affatto semplice e chiede una soluzione numerica, ad esempio basata sulla ricerca degli zeri di una funzione mediante il metodo di Newton-Raphson. Per il calcolo di n si è proceduto in tal senso risolvendo l'espressione attraverso un software di calcolo matematico (Maple 12) ottenendo il seguente risultato:

$$n = 3,15$$

Altezza minima del meato h_2 :

Si deve verificare che il valore h_2 sia accettabile, cioè che sia maggiore di circa tre volte l'altezza massima delle asperità superficiali. Si può supporre per il caso esaminato che un valore minimo di riferimento per h_2 sia $30 \mu m$.

$$h_2 = l \sqrt{\frac{A \cdot \mu \cdot V}{N}} = 0,0375 \sqrt{\frac{(0,144) \cdot (35 \cdot 10^{-3}) \cdot (8,378)}{166666,667}} = 0,000037 = 37 \mu m$$

dove la costante A è stata posta pari a:

$$A = 6 \cdot \frac{(n+1) \ln n - 2(n-1)}{(n+1)(n-1)^2} = 0,144$$

Il valore di h_2 è considerato corretto.

Coefficiente di attrito mediato f_m :

$$f_m = k \sqrt{\frac{\mu \cdot V}{N}} = 1,813 \sqrt{\frac{(35 \cdot 10^{-3}) \cdot (8,378)}{166666,667}} = 0,0024$$

dove la costante k è stata posta pari a:

$$k = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{\ln n - \frac{3(n-1)}{2(n+1)}}{\sqrt{\ln n - 2 \frac{(n-1)}{(n+1)}}} = 1,813$$

Il valore di f_m è considerato corretto perché rientra nell'ordine del millesimo.

Pressione media p_m :

$$p_m = \frac{P/8}{A_{pattino}} = \frac{P/8}{\frac{1}{2}(R^2 - r^2) \frac{2\pi}{8}} = \frac{10000}{\frac{1}{2}(0,130^2 - 0,070^2) \frac{2\pi}{8}} = 2,12 \text{ Mpa}$$

Effetto delle fuoriuscite laterali:

La trattazione del problema nel caso reale, in cui la larghezza del pattino ha un valore finito, è più complessa della trattazione precedente. Nelle applicazioni si cerca di ridurre gli inconvenienti che discendono dalle fuoriuscite laterali imponendo una limitazione della lunghezza l del pattino in confronto con la larghezza b in modo che il rapporto l/b , chiamato *rapporto di snellezza*, non superi certi valori suggeriti dalla prassi.

In prima approssimazione per correggere i valori calcolati della forza sostentatrice N per unità di lunghezza e del coefficiente di attrito mediato f_m , si suggerisce di dividere il carico N per il coefficiente correttivo c , così definito:

$$c = \frac{b + l}{b}$$

e di moltiplicare il coefficiente d'attrito mediato f_m , per il coefficiente correttivo c' , così definito:

$$c' = \sqrt{\frac{b + 4l}{b}}$$

Nel nostro caso, usando i seguenti valori di c e c' , si ottengono i nuovi valori di N ed f_m :

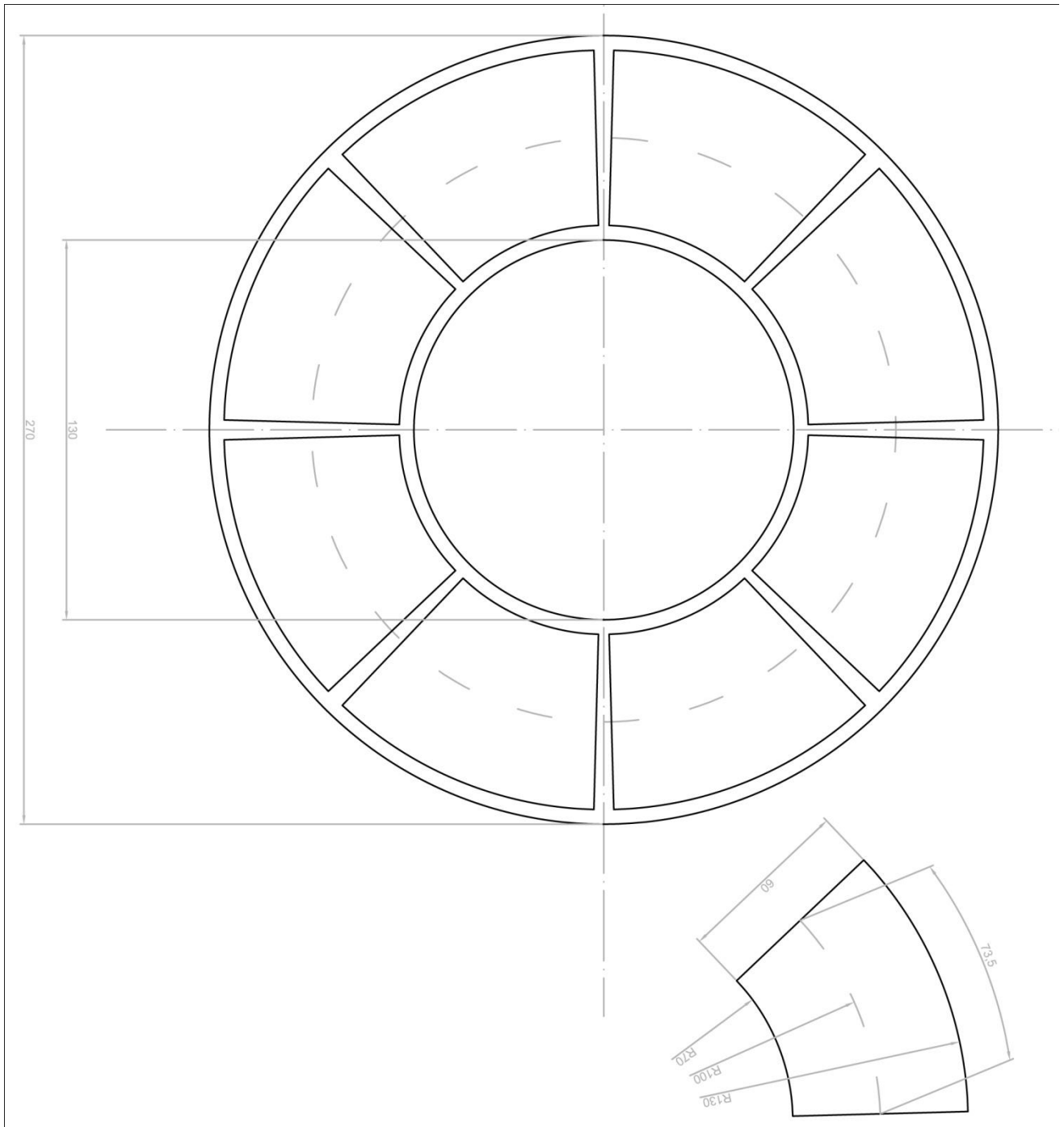
$$c = 2,225 \quad e \quad c' = 2,429$$

$$N' = \frac{N}{c} = \frac{166666,667}{2,225} = 74,9 \text{ kN/m}$$

$$f'_m = c' \cdot f_m = c' \cdot k \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot V}{N'}} = 2,429 \cdot 1,813 \cdot \sqrt{\frac{(35 \cdot 10^{-3}) \cdot (8,378)}{74906,37}} = 0,0087$$

Schizzo quotato del cuscinetto:

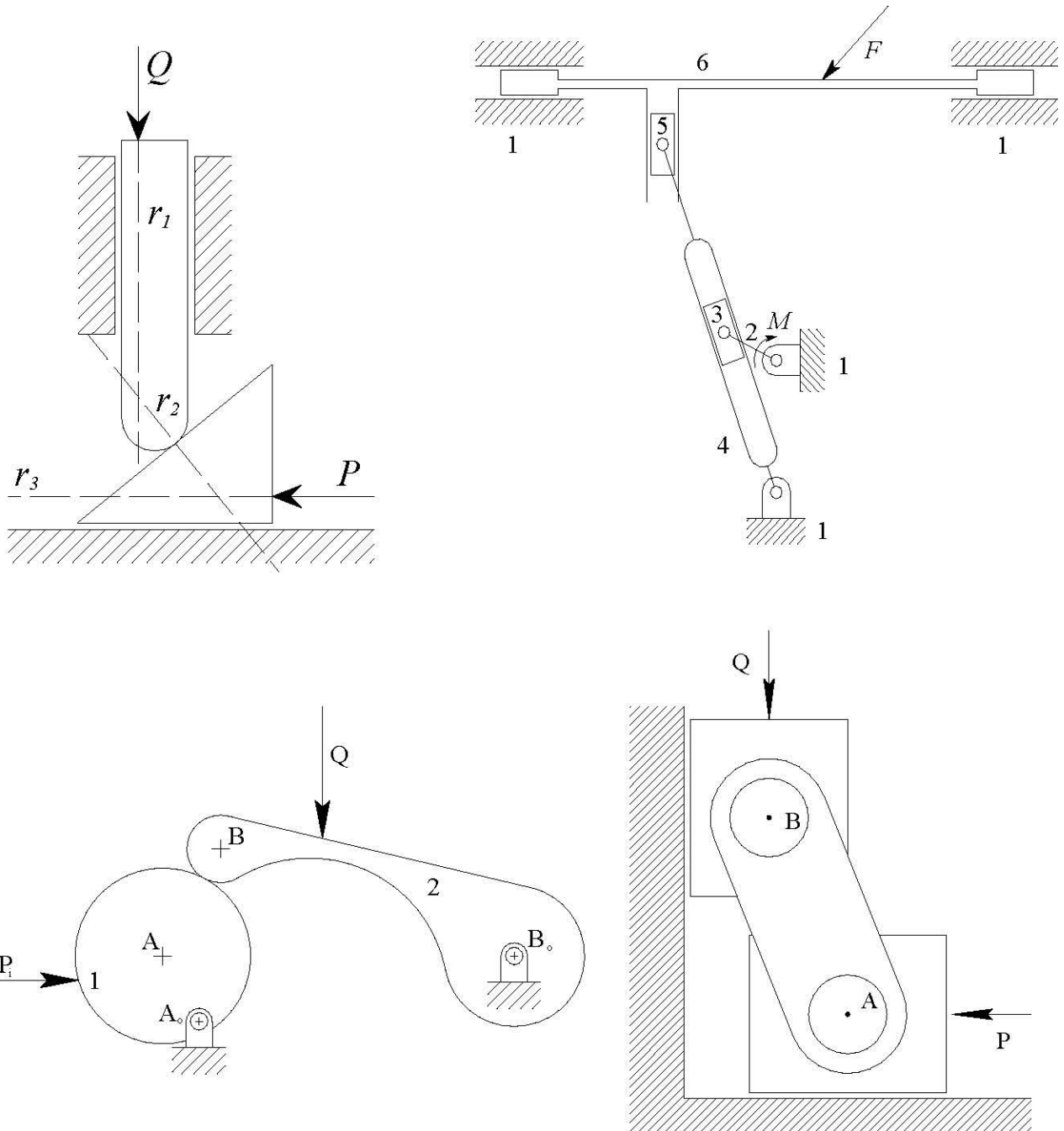
Scala 1:2



Esercizione N.8

Calcolo del rendimento di meccanismi in regime assoluto mediante formule pratiche.

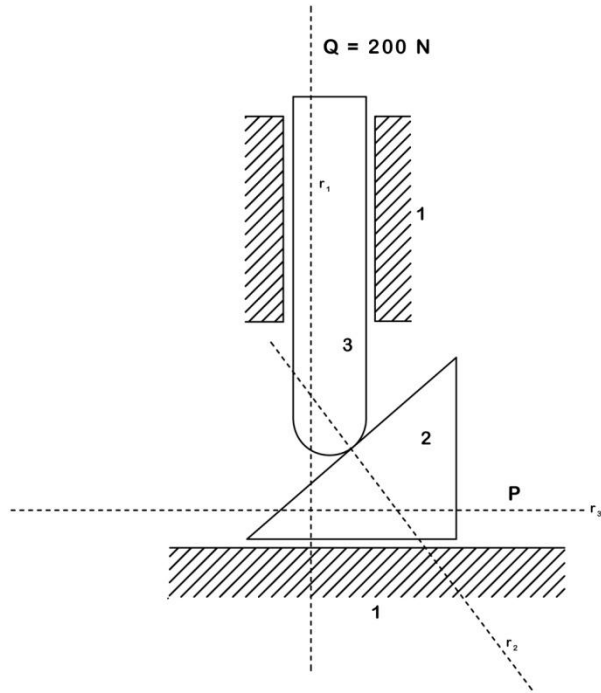
Con riferimento ai meccanismi presentati nell'esercitazione di statica e nel rispetto delle proporzioni ivi rappresentate, se ne determini il rendimento nel moto diretto e retrogrado, mediante le formule pratiche $\eta_D = P_i/P$ ed $\eta_R = P'/P_i$, avendo assunto un angolo di attrito pari a 5° per tutte le coppie di materiali a contatto. Nella guida di Fairbairn e nella coppia di leve striscianti si considerino ideali le cerniere (essendo con attrito nel doppio pattino).



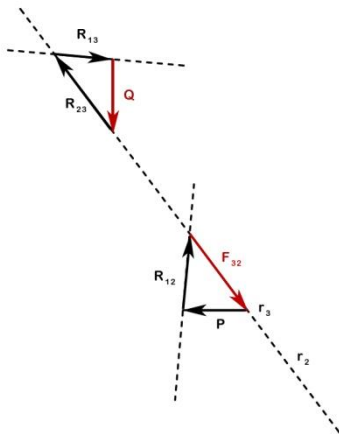
Esercizio 1. Calcolo del rendimento η_D e η_R .

$$\eta_D = \frac{P_i}{P} = \frac{174}{210} = 0.83$$

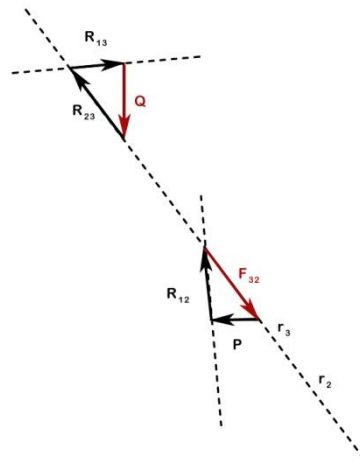
$$\eta_R = \frac{P'}{P_i} = \frac{145}{174} = 0.83$$



Moto Diretto



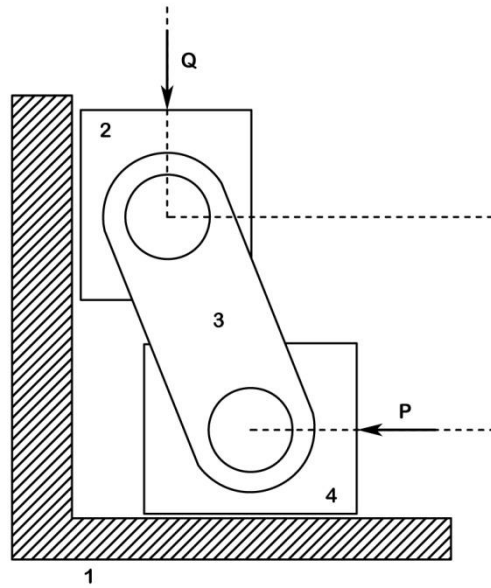
Moto Retrogrado



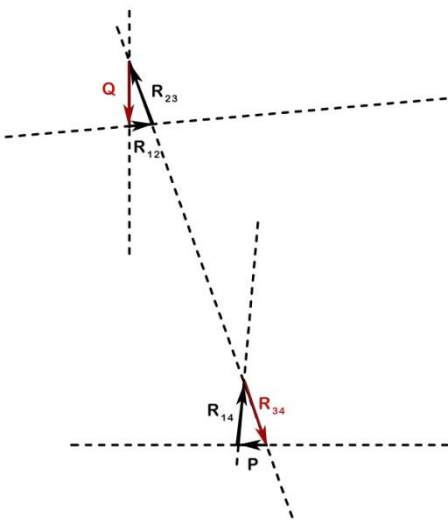
Esercizio 2. Calcolo del rendimento η_D e η_R .

$$\eta_D = \frac{P_i}{P} = \frac{60}{64} = 0.94$$

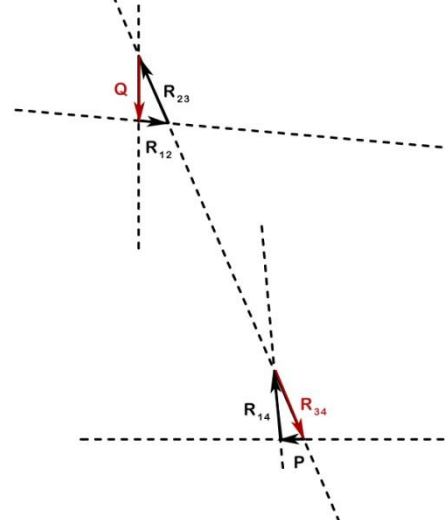
$$\eta_R = \frac{P'}{P_i} = \frac{53}{60} = 0.88$$



Moto Diretto



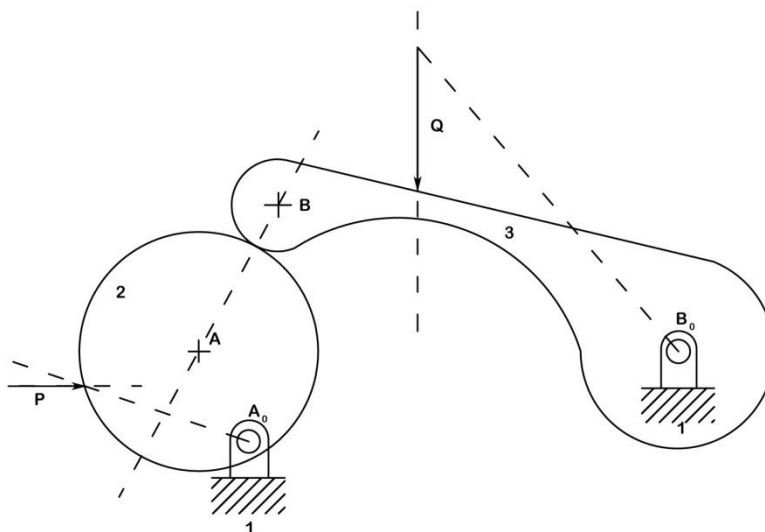
Moto Retrogrado



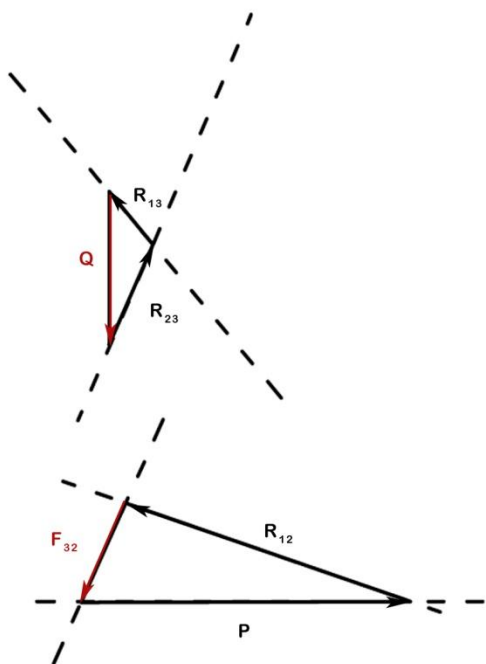
Esercizio 3. Calcolo del rendimento η_D e η_R .

$$\eta_D = \frac{P_i}{P} = \frac{490}{508} = 0.96$$

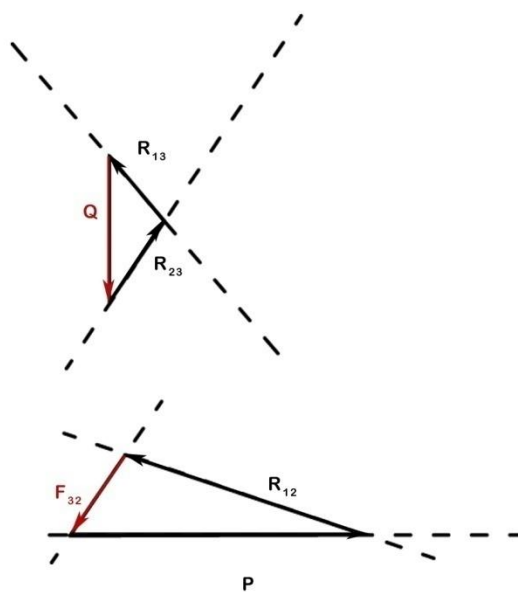
$$\eta_R = \frac{P'}{P_i} = \frac{462}{490} = 0.94$$



Moto Diretto

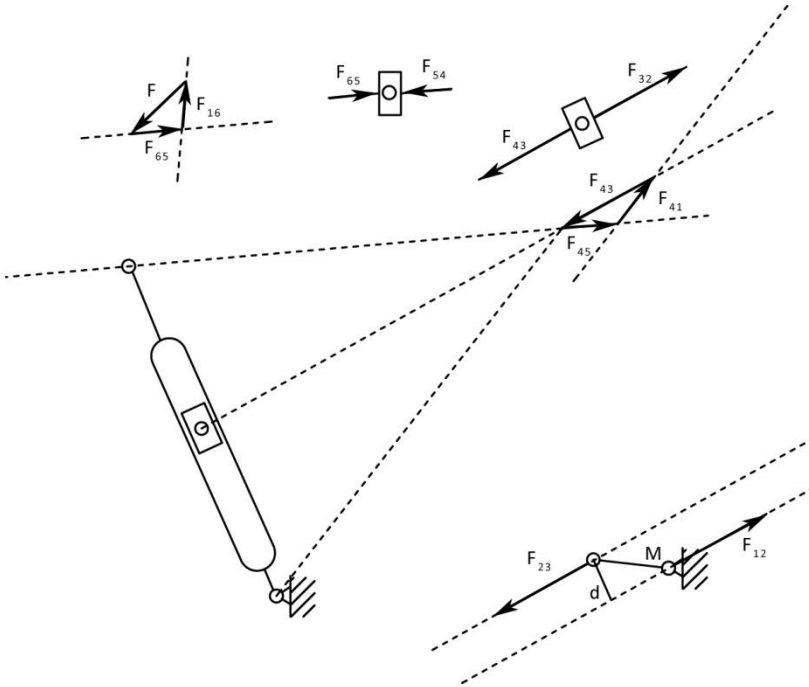


Moto Retrogrado

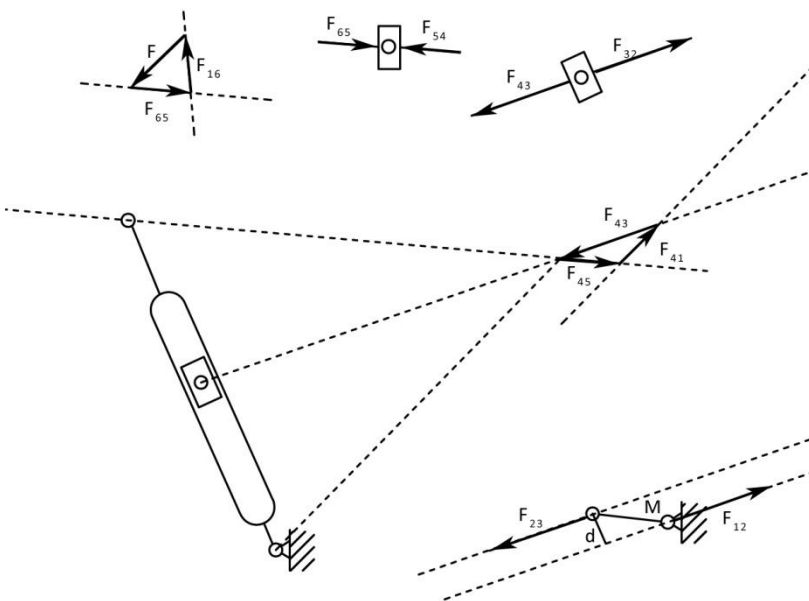


Esercizio 4. Calcolo del rendimento η_D e η_R .

$$\eta_D = \frac{M_i}{M} = \frac{7.3}{8.2} = 0.9$$



$$\eta_R = \frac{M'}{M_i} = \frac{5.9}{7.3} = 0.8$$



Esercitazione N.9

Evolvente e cicloide.

PARTE PRIMA

Una ruota di diametro $d = 1$ m (polare mobile) rotola su una guida rettilinea (polare fissa) con una velocità angolare $\omega = 30 \text{ rad s}^{-1}$.

Si costruisca la traiettoria (cicloide) del punto P_0 di contatto delle polari nell'istante iniziale, ed il relativo diagramma degli spazi percorsi, in funzione del tempo, per via analitica.

Si determinino i valori della velocità e dell'accelerazione (con le relative componenti normale e tangenziale) del punto tracciante ed i centri di curvatura della cicloide:

- 1) in corrispondenza ad una rotazione $\phi = \frac{3}{4}\pi$ rad della ruota;
- 2) nell'istante in cui il punto tracciante ha percorso uno spazio $s = 4$ m.

PARTE SECONDA

Una retta l rotola in senso orario su una circonferenza di diametro $d = 0,6$ m con velocità angolare $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$.

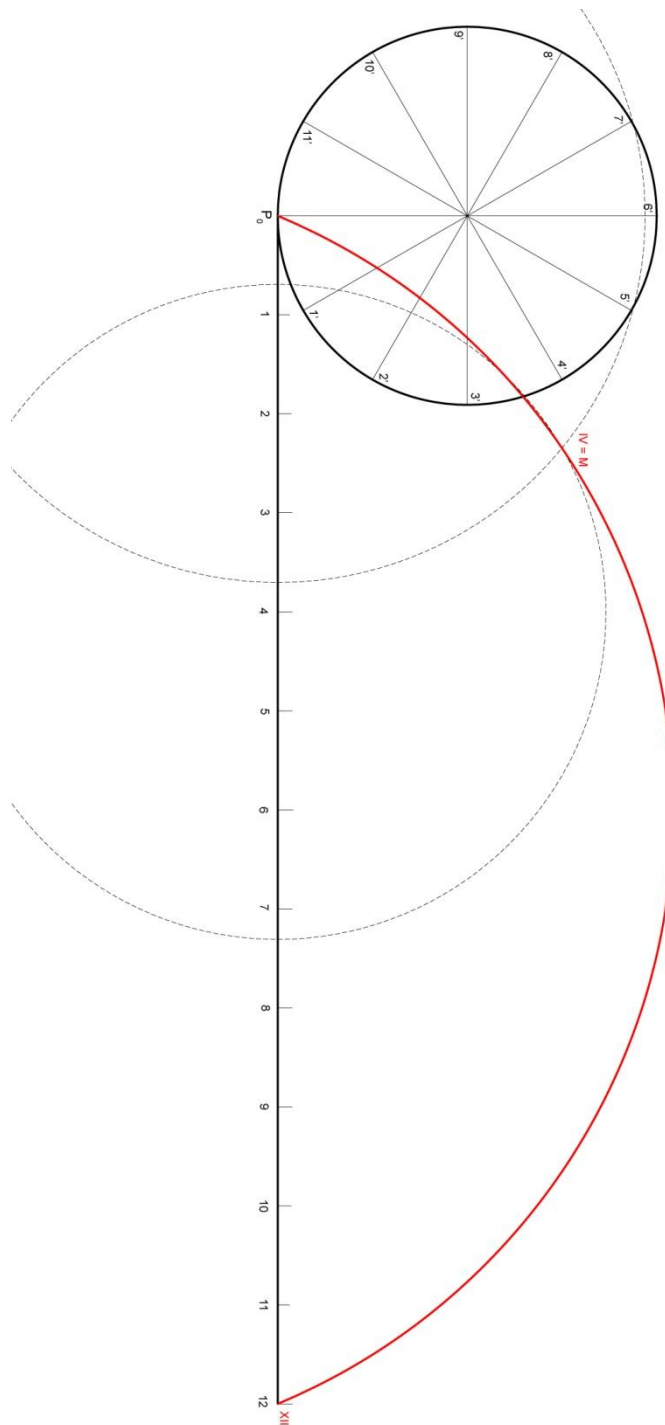
Si costruisca, per via analitica, la traiettoria (evolvente) del punto M della retta che, nell'istante iniziale del moto, è punto di tangenza tra retta e circonferenza, nonché il corrispondente diagramma degli spazi percorsi in funzione del tempo.

Si determinino i valori della velocità e dell'accelerazione (con le relative componenti normale e tangenziale) del punto tracciante in corrispondenza alla posizione che la retta assume agli istanti $t_1 = 0,14$ s e $t_2 = 0,28$ s.

PARTE PRIMA

Al fine di determinare la traiettoria del punto di contatto tra la ruota (polare mobile l) e guida rettilinea (polare fissa λ) nell'istante iniziale, si suddivide la ruota in 12 settori e la guida rettilinea in altrettanti segmenti tali che la loro lunghezza sia uguale agli archetti con cui si è suddivisa la ruota stessa. Quando il generico punto $4'$ del cerchio d sarà venuto a contatto col punto 4 della guida, P_0 sarà andato nel punto M, che si ottiene come intersezione dell'arco di centro P_0 e raggio uguale al segmento $44'$, con l'arco di centro 4 raggio uguale alla corda P_04' . Procedendo analogamente si determinano i punti I,II,...XII che uniti con la linea continua danno la traiettoria (cicloide) del punto P_0 .

Scala 1:20



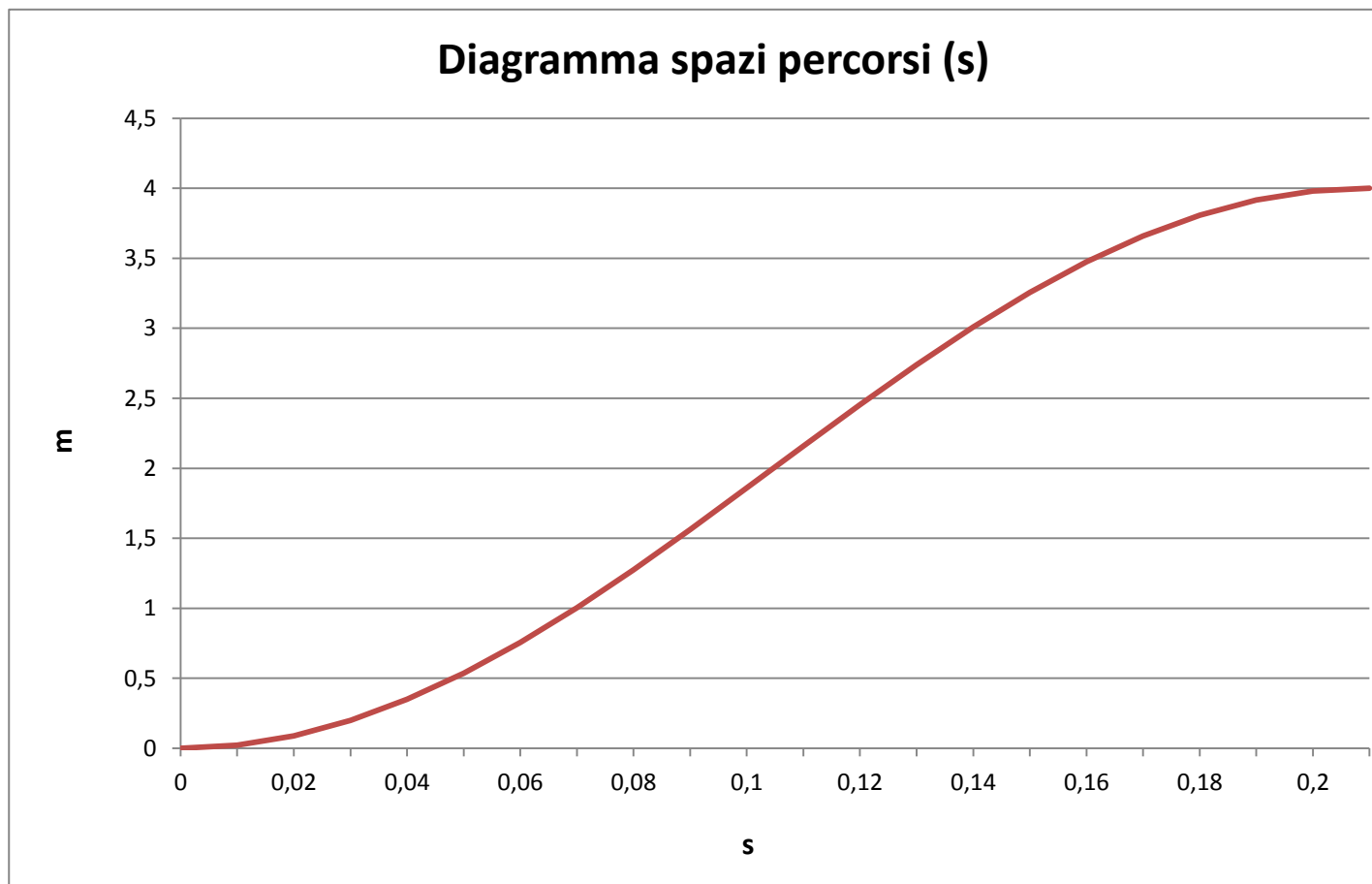
Per determinare il diagramma degli spazi percorsi dal punto P_0 , in funzione del tempo, per via analitica, si traccia un sistema di assi di riferimento x ed y condotti per P_0 come in figura. Indicando con $\vartheta = \omega t$ l'angolo che sottende l'arco di cui ha ruotato il cerchio l nel tempo t , possiamo scrivere le seguenti equazioni parametriche della cicloide:

$$x = r(\omega t - \text{sen}\omega t)$$

$$y = r(1 - \text{cos}\omega t)$$

La lunghezza dell'arco di cicloide s è dato da:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 4r \left(1 - \cos\frac{\omega}{2}t\right)$$



La velocità del punto tracciante M in corrispondenza ad una rotazione $\phi = \frac{3}{4}\pi$ della ruota è pari a:

$$v_M = \omega \cdot P_0M = 30 \cdot 0,71 = 21,2 \text{ m/s}$$

La componente normale dell'accelerazione di M è diretta da M verso P_0 e ha modulo pari a:

$$a_n = \frac{v_M^2}{\rho} = \frac{21,2^2}{1,44} = 312,1 \text{ m/s}^2$$

dove ρ è il raggio di curvatura in M della traiettoria: $\rho_M = \frac{P_0M^2}{M'M} = \frac{0,71^2}{0,35} = 1,44 \text{ m}$

Per trovare i valori necessari si è tracciata la circonferenza di stazionarietà, sapendo che è tangente in P_0 alle due polari e il suo diametro attraverso le formule di Euler-Savary è pari a:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$$

dove il raggio di curvatura della polari fissa è $r = \infty$ e quello della polare mobile è r'

$$\delta = r = 0,5 \text{ m}$$

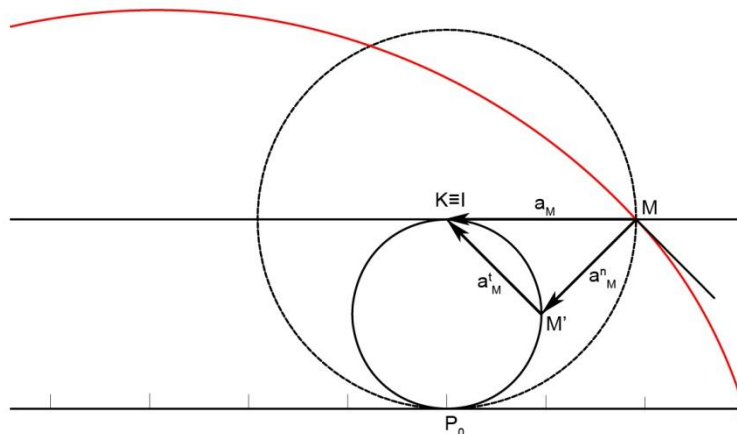
Essendo la velocità angolare di rotazione della polare mobile sulla polare fissa costante, il centro delle accelerazioni K coinciderà con il polo dei flessi I e il cerchio di stazionarietà degenererà nella retta P_0K .

$$a_M = KM \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot \omega^4} = KM \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot 30^2 = 450 \text{ m/s}^2$$

Attraverso un'opportuna scala delle accelerazioni si ricava dal disegno la componente tangenziale dell'accelerazione del punto M:

$$a_t = 315 \text{ m/s}^2$$

Nell'istante in cui il punto tracciante ha percorso uno spazio di 4 m non ha senso effettuare uno studio cinematico poiché il punto $M \equiv P_0$.



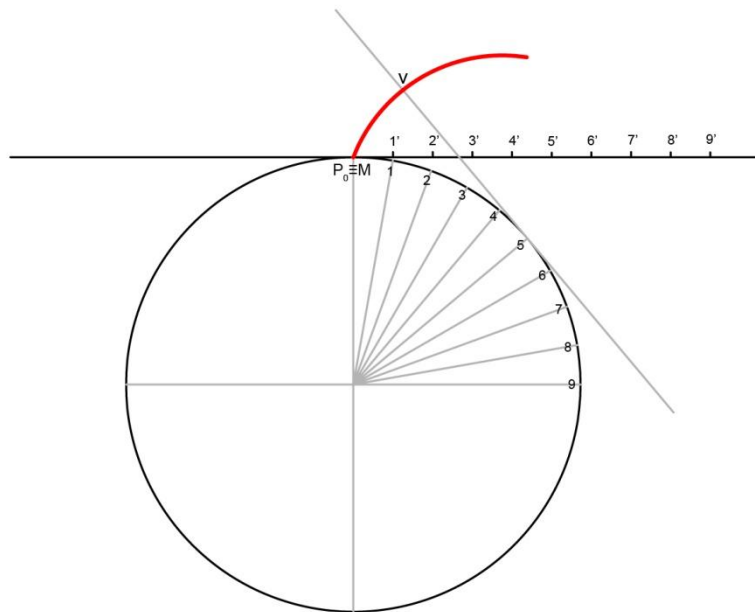
PARTE SECONDA

La costruzione dell'evolvente E si esegue portando sulla polare l a partire da P_0 un certo numero di segmenti sufficientemente piccoli P_01' , $1'2'$... e riportandoli sulla polare λ in modo che sia $P_01 = P_01'$, $12 = 1'2'$...

Nel moto considerato i punti $1'$, $2'$... della retta l verranno a coincidere con i punti 1 , 2 ... del cerchio λ , rappresentando i successivi centri di istantanea rotazione. Per trovare ad esempio la posizione V assunta del punto P_0 quando il punto $5'$ di l si è portato nel punto 5 di λ , basterà condurre in 5 la tangente a λ e staccare su questa un segmento uguale a P_05' .

Ripetendo tale costruzione per tutte le diverse posizioni assunta dalla l sulla λ e unendo i punti così ottenuti, si ha un arco della evolvente E. Invertendo il senso di rotazione della l si può ottenere l'altro ramo dell'evolvente E sempre avente origine in P_0 .

Scala 1:10



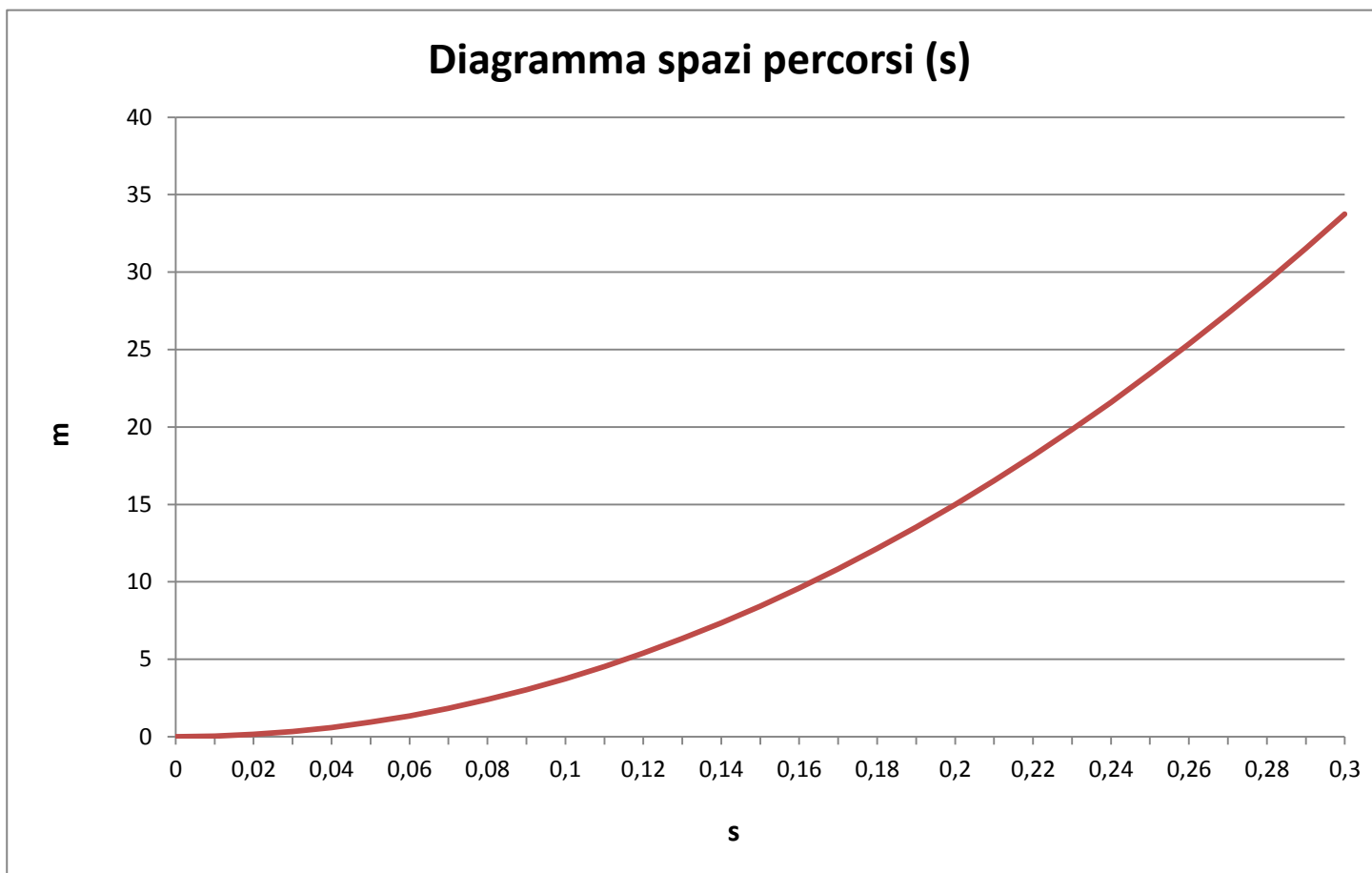
Le equazioni parametriche della evolvente riferita ad un sistema di assi con origine in C ed asse x coincidente con il segmento CP₀, sono:

$$x = r(\cos\varphi - \varphi \operatorname{sen}\varphi)$$

$$y = r(\operatorname{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi)$$

La lunghezza dell'arco di evolvente s è dato da:

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{1}{2} r\varphi^2 = \frac{1}{2} r(\omega t)^2$$



Derivando rispetto al tempo t e ricordando che $\varphi = \omega t$, si trovano le espressioni della velocità v_M e delle componenti dell'accelerazione a_M .

$$v_M = \frac{ds}{dt} = \omega^2 r t$$

$$a_M^t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \omega^2 r$$

$$a_M^n = \frac{v_M^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r t}{r \varphi} = \omega^3 r t$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^t)^2 + (a_M^n)^2}$$

Istante $t_1 = 0,14$ s

$$v_M = \omega^2 r t = 50^2 \cdot 0,30 \cdot 0,14 = 105 \text{ m/s}$$

$$a_M^t = \omega^2 r = 50^2 \cdot 0,30 = 750 \text{ m/s}^2$$

$$a_M^n = \omega^3 r t = 50^3 \cdot 0,30 \cdot 0,14 = 5250 \text{ m/s}^2$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^t)^2 + (a_M^n)^2} = 5303,3 \text{ m/s}^2$$

Istante $t_2 = 0,28$ s

$$v_M = \omega^2 r t = 50^2 \cdot 0,30 \cdot 0,28 = 210 \text{ m/s}$$

$$a_M^t = \omega^2 r = 50^2 \cdot 0,30 = 750 \text{ m/s}^2$$

$$a_M^n = \omega^3 r t = 50^3 \cdot 0,30 \cdot 0,28 = 10500 \text{ m/s}^2$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^t)^2 + (a_M^n)^2} = 10526,75 \text{ m/s}^2$$

Esercitazione N.10

Metodi analitici di analisi cinematica.

Sia assegnato un quadrilatero $OABC$ caratterizzato dalle seguenti dimensioni delle aste:

$A_0B_0 = 80$ cm, la lunghezza del telaio (asta r_1 e anomalia $\vartheta_1 = \pi$);

$A_0A = 20$ cm, la lunghezza della manovella (asta r_2 e anomalia ϑ_2);

$AB = 50$ cm, la lunghezza della biella (asta r_3 e anomalia ϑ_3);

$BB_0 = 70$ cm, la lunghezza del bilanciere (asta r_4 e anomalia ϑ_4);

e dalla velocità angolare (costante) della manovella:

$$\omega_2 = 400 \text{ giri/minuto.}$$

Calcolare, in corrispondenza dell'anomalia della manovella $\vartheta_2=20^\circ$ (misurata a partire dalla posizione di sovrapposizione della manovella rispetto al telaio):

- una a scelta delle due configurazioni possibili del quadrilatero;
- le velocità e le accelerazioni angolari delle aste;
- le velocità e le accelerazioni delle mezzerie delle aste;
- il centro di curvatura della traiettoria della mezzeria della biella;

mediante il metodo analitico esatto.

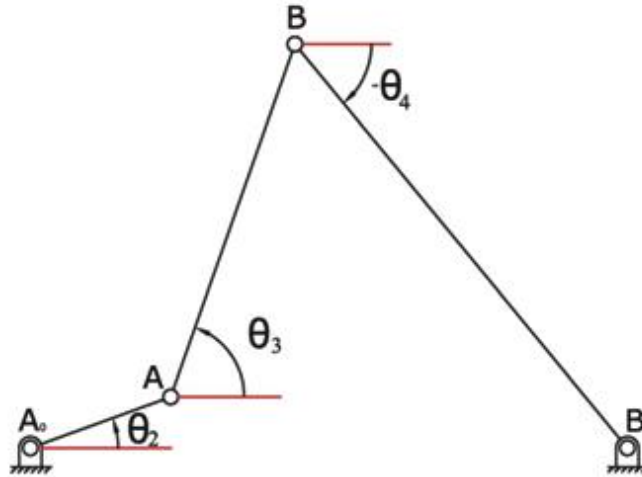
Verificare il calcolo effettuato con i risultati ottenuti applicando il metodo dei diagrammi polari.

Infine, si deduca, sempre analiticamente, il diagramma della velocità angolare dell'asta cedente come funzione della posizione angolare della manovella, per un giro completo della stessa.

Introduzione

Il metodo analitico che si userà in seguito per l'analisi cinematica del quadrilatero articolato fonda le sue basi sulla definizione delle equazioni di chiusura.

Sostituendo alle aste componenti il quadrilatero dei vettori aventi modulo pari alla lunghezza dell'asta corrispondente e avente anomalia ϑ misurata a partire dal semiasse positivo delle ascisse, il quadrilatero in una generica configurazione può essere così rappresentato:



Di seguito viene scritta l'equazione di chiusura in forza vettoriale de quadrilatero, dove gli r_i sono i vettori rappresentanti le aste componenti del meccanismo.

$$\sum_{i=1}^4 \vec{r}_i = 0$$

Essendo il meccanismo piano, l'equazione vettoriale precedente darà luogo a due equazioni scalari:

$$x: |\vec{r}_2| \cos \theta_2 + |\vec{r}_3| \cos \theta_3 + |\vec{r}_4| \cos \theta_4 - |\vec{r}_1| = 0$$

$$y: |\vec{r}_2| \sin \theta_2 + |\vec{r}_3| \sin \theta_3 + |\vec{r}_4| \sin \theta_4 = 0$$

Configurazioni possibili del quadrilatero

Una volta definite le equazioni di chiusura si determina la configurazione del meccanismo in corrispondenza di un angolo della manovella pari a $\vartheta = 20^\circ$. Bisogna determinare quindi gli angoli ϑ_3 e ϑ_4 affinché siano verificate le equazioni di chiusura.

Le precedenti equazioni possono essere così scritte:

$$r_3 \cos \theta_3 = r_1 - r_2 \cos \theta_2 - r_4 \cos \theta_4$$

$$-r_3 \sin \theta_3 = r_2 \sin \theta_2 + r_4 \sin \theta_4$$

Quadrando e sommando i due membri delle precedenti equazioni si ottiene la seguente espressione in cui l'incognita è ϑ_4 :

$$A \cos \theta_4 + B \sin \theta_4 + C = 0$$

Dove si è posto:

$$A = 2|\vec{r}_4| (|\vec{r}_2| \cos \theta_2 - |\vec{r}_1|) \quad B = 2|\vec{r}_4| |\vec{r}_2| \sin \theta_2$$

$$C = -|\vec{r}_3|^2 + |\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_4|^2 - 2|\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos \theta_2$$

Al fine di risolvere la precedente equazione, risulta conveniente effettuare la seguente sostituzione:

$$\cos \theta_4 = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_4}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_4}{2}} \quad \sin \theta_4 = \frac{2 \tan \frac{\theta_4}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_4}{2}}$$

Così facendo si ottiene:

$$(C - A) \tan^2 \frac{\theta_4}{2} + 2B \tan \frac{\theta_4}{2} + C + A = 0$$

A questo punto è possibile risolvere la precedente equazione ottenendo due valori possibili per l'angolo ϑ_4 . In particolare si ottengono le seguenti soluzioni:

$$\theta_4 = \begin{bmatrix} 0.6582004834 \\ -0.8807969084 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza si calcola il valore dell'angolo ϑ_3 mediante la seguente formula:

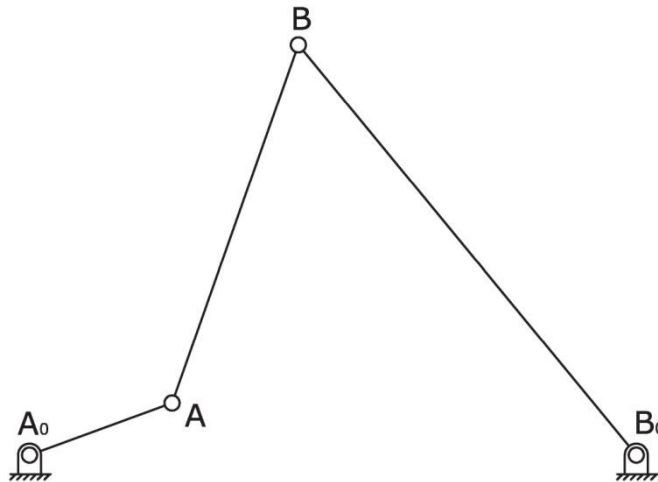
$$\sin \theta_3 = -\frac{|\vec{r}_2| \sin \theta_2 + |\vec{r}_4| \sin \theta_4}{|\vec{r}_3|}$$

Così facendo si ottiene:

$$\theta_3 = \begin{bmatrix} -1.453939572 \\ 1.231343147 \end{bmatrix}$$

Prendendo a scelta una delle due possibili soluzioni otteniamo la seguente configurazione per il quadrilatero articolato:

$$\theta_3 = 1.231343147 \quad ; \quad \theta_4 = -0.8807969084$$



Velocità ed accelerazioni angolari delle aste

Velocità angolari

Si determinano ora le velocità angolari della biella e del bilanciere in funzione della velocità angolare ω_2 della manovella.

Per questo scopo usiamo i numeri complessi e scriviamo le equazioni di chiusura nel seguente modo:

$$\sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \cdot e^{i\theta_j} = 0$$

Si scrive ora l'equazione di chiusura del quadrilatero articolato:

$$|\vec{r}_2|e^{i\theta_2} + |\vec{r}_3|e^{i\theta_3} + |\vec{r}_4|e^{i\theta_4} - |\vec{r}_1| = 0$$

Derivando rispetto al tempo l'equazione di chiusura otteniamo:

$$i|\vec{\omega}_2||\vec{r}_2|e^{i\theta_2} + i|\vec{\omega}_3||\vec{r}_3|e^{i\theta_3} + i|\vec{\omega}_4||\vec{r}_4|e^{i\theta_4} = 0$$

Moltiplicando la precedente espressione per $e^{-i\theta_3}$ si ottiene:

$$i|\vec{\omega}_2||\vec{r}_2|e^{i(\theta_2-\theta_3)} + i|\vec{\omega}_3||\vec{r}_3| + i|\vec{\omega}_4||\vec{r}_4|e^{i(\theta_4-\theta_3)} = 0$$

In questa equazione compare il termine $i|\vec{\omega}_3||\vec{r}_3|$ che ha solamente parte immaginaria. Proiettando la precedente equazione sull'asse reale, ed utilizzando la formula di Eulero, otteniamo:

$$ie^{i(\theta_2-\theta_3)} = i[\cos(\theta_2 - \theta_3) + i \sin(\theta_2 - \theta_3)]$$

$$ie^{i(\theta_4-\theta_3)} = i[\cos(\theta_4 - \theta_3) + i \sin(\theta_4 - \theta_3)]$$

Si ha quindi che l'equazione proiettata sull'asse reale sarà la seguente:

$$-|\vec{\omega}_2||\vec{r}_2|\sin(\theta_2 - \theta_3) - |\vec{\omega}_4||\vec{r}_4|\sin(\theta_4 - \theta_3) = 0$$

Da cui otteniamo ω_4 :

$$|\vec{\omega}_4| = -\frac{|\vec{\omega}_2||\vec{r}_2|\sin(\theta_2 - \theta_3)}{|\vec{r}_4|\sin(\theta_4 - \theta_3)} = -10.78 \text{ rad/s}$$

Effettuando analoghi passaggi possiamo ottenere la velocità angolare di ω_3 :

$$|\vec{\omega}_3| = \frac{|\vec{\omega}_2||\vec{r}_2|\sin(\theta_2 - \theta_4)}{|\vec{r}_4|\sin(\theta_4 - \theta_3)} = -18.42 \text{ rad/s}$$

Accelerazioni angolari

Per determinare le accelerazioni angolari α_3 ed α_4 si deriva l'equazione di chiusura delle velocità scritta in precedenza:

$$i|\vec{\omega}_2||\vec{r}_2|e^{i\theta_2} + i|\vec{\omega}_3||\vec{r}_3|e^{i\theta_3} + i|\vec{\omega}_4||\vec{r}_4|e^{i\theta_4} = 0$$

Risolvendo questa equazione in modo analogo al punto precedente si ottengono i seguenti valori:

$$|\vec{\alpha}_3| = -259.65 \text{ rad/s}^2$$

$$|\vec{\alpha}_4| = 584.71 \text{ rad/s}^2$$

Velocità ed accelerazioni delle mezzerie delle aste

Per calcolare le velocità e le accelerazioni delle mezzerie delle aste utilizziamo le seguenti formulazioni:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \vec{v}_{DE}$$

$$\vec{a}_E = \vec{a}_D - \vec{\omega}^2 \cdot \overline{DE} + \vec{\alpha} \times \overline{DE}$$

Proiettando queste equazioni lungo gli assi x ed y otteniamo:

$$\begin{bmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} DE_x \\ DE_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Ex} \\ a_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 DE_x \\ \omega^2 DE_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} DE_x \\ DE_y \end{bmatrix}$$

I risultati che si ottengono sono i seguenti:

Baricentro manovella G₂

$$\begin{bmatrix} v_{G2x} \\ v_{G2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.43 \\ 3.94 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{G2x} \\ a_{G1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 164.88 \\ 60.01 \end{bmatrix}$$

$$v_{G2} = 4.19 \text{ m/s} \qquad a_{G2} = 175.46 \text{ m/s}^2$$

Baricentro biella G₃

$$\begin{bmatrix} v_{G3x} \\ v_{G3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.43 \\ -1.53 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{G3x} \\ a_{G3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 296.81 \\ 221.66 \end{bmatrix}$$

$$v_{G3} = 6.51 \text{ m/s} \qquad a_{G3} = 370.44 \text{ m/s}^2$$

Baricentro bilanciata G₄

$$\begin{bmatrix} v_{G4x} \\ v_{G4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.91 \\ -2.40 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{G4x} \\ a_{G4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183.74 \\ -98.88 \end{bmatrix}$$

$$v_{G4} = 3.77 \text{ m/s} \qquad a_{G4} = 208.66 \text{ m/s}^2$$

Centro di curvatura della traiettoria della mezzeria della biella

Il raggio di curvatura della mezzeria della biella può essere calcolato per via analitica mediante la formula:

$$\rho = \frac{1}{|k|}$$

Dove con k si è indicata la curvatura pari a:

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Da cui si ottiene:

$$\rho = 0.18 \text{ m}$$

Di conseguenza il centro di curvatura avrà coordinate:

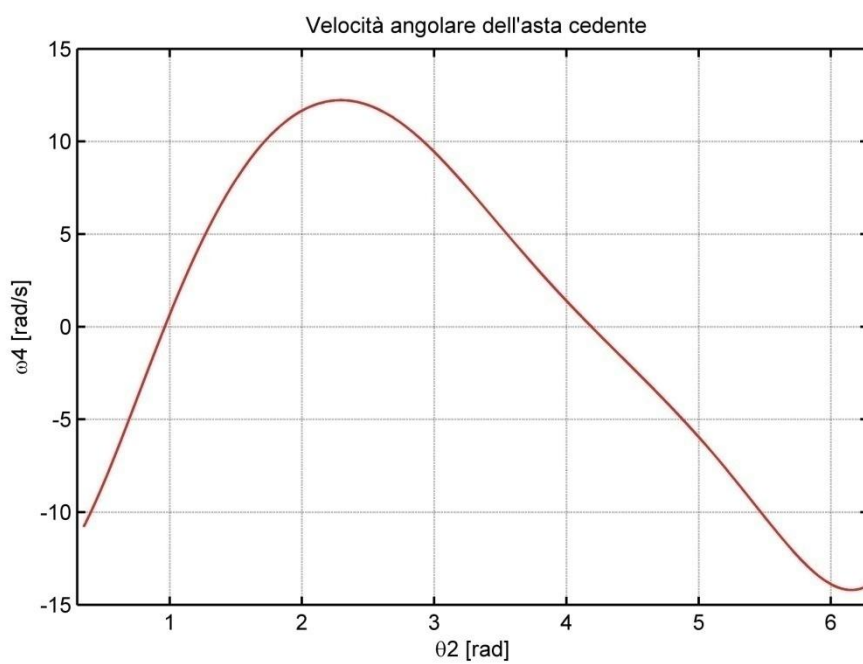
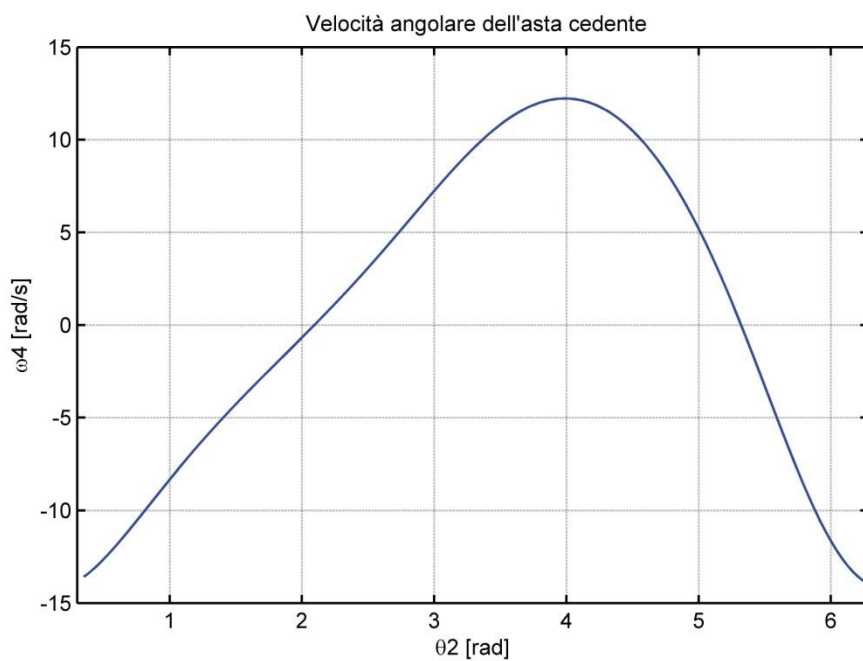
$$\rho_x = 0.10 \text{ m} \qquad \rho_y = 0.36 \text{ m}$$

Diagramma della velocità angolare dell'asta cedente

Si riporta ora il diagramma della velocità angolare del bilanciere ω_4 in funzione dell'angolo della manovella ϑ_2 . In particolare si otterranno due andamenti a seconda del valore dell'angolo ϑ_4 considerato positivo o negativo.

$$|\vec{\omega}_4| = -\frac{|\vec{\omega}_2||r_2|\sin(\theta_2 - \theta_3)}{|r_4|\sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$\theta_4 = \begin{bmatrix} 0.6582004834 \\ -0.8807969084 \end{bmatrix}$$



Metodo dei diagrammi polari

La velocità del punto A può essere calcolata conoscendo il valore della velocità angolare ω_2 della manovella mediante la relazione:

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \cdot A_0A = 41.89 \cdot 0.20 = 8.38 \text{ m/s}$$

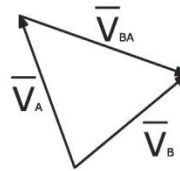
In maniera analoga possiamo calcolare la velocità del punto di mezzeria della manovella che avrà modulo pari a:

$$|\vec{v}_{G2}| = \omega_2 \cdot A_0G_{G2} = 41.89 \cdot 0.10 = 4.19 \text{ m/s}$$

La velocità del punto B invece si calcola mediante la formula:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

\vec{v}_B	=	\vec{v}_A	\vec{v}_{BA}
$\parallel \vec{B}_0\vec{B}$	=	$\perp \vec{A}_0\vec{A}$	$\perp \vec{BA}$
?	=	$\omega_2 \cdot A_0A$?



Utilizzando un'opportuna scala delle velocità si ottengono i seguenti valori:

$$v_B = 7.55 \text{ m/s}$$

$$v_{BA} = 9.21 \text{ m/s}$$

La velocità angolare della biella ω_3 si calcola sfruttando la definizione di v_{BA} :

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_3 \times \vec{AB}$$

$$|\vec{\omega}_3| = \frac{v_{BA}}{AB} = 18.42 \text{ rad/s}$$

Dato che il punto B oltre ad appartenere alla biella, appartiene al bilanciante, possiamo ricavare ω_4 come segue:

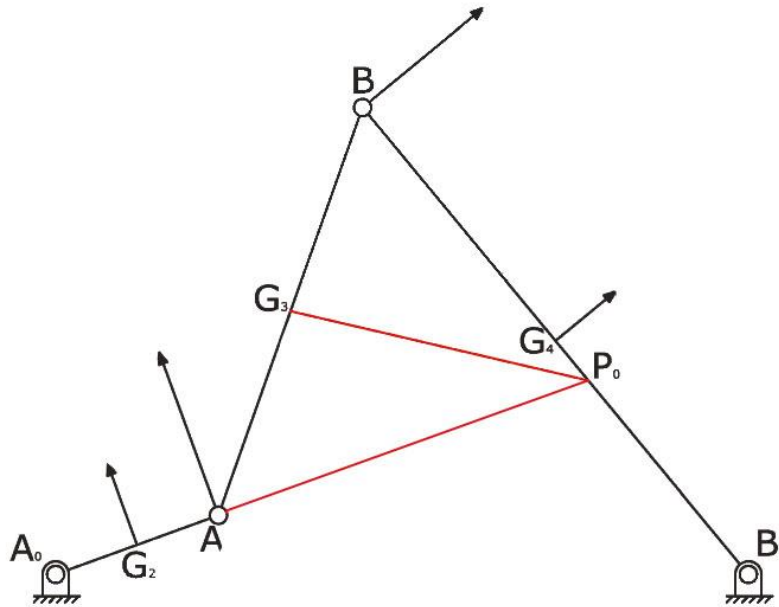
$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_4 \times \vec{B}_0\vec{B}$$

$$|\vec{\omega}_4| = \frac{v_B}{B_0B} = 10.78 \text{ rad/s}$$

Si calcola ora la velocità del punto di mezzeria della biella, mediante la formula:

$$\vec{v}_{G3} = \vec{\omega}_3 \times \vec{P}_0\vec{G}_3 = 6.51 \text{ m/s}$$

Dove P_0 è il centro di istantanea rotazione del moto della biella rispetto al telaio, che si determina facilmente come segue:



Tenendo conto che il bilanciere descrive una traiettoria circolare con centro nella cerniera B₀, si ricava:

$$\vec{v}_{G4} = \vec{\omega}_4 \times \vec{B_0G_4} = 3.77 \text{ m/s}$$

La velocità angolare della manovella ω_2 è costante, da ciò discende che l'accelerazione angolare α_2 della stessa, sarà pari a zero.

In base a ciò si ha:

$$|\vec{a}_A| = \omega_2^2 \cdot A_0A = 350.92 \text{ m/s}^2$$

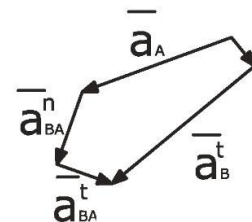
In modo analogo abbiamo:

$$|\vec{a}_{G2}| = \omega_2^2 \cdot A_0G_2 = 175.46 \text{ m/s}^2$$

Per calcolare l'accelerazione del punto B, si usa la seguente formula:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

\vec{a}_B^n	\vec{a}_B^t	=	\vec{a}_A^n	\vec{a}_{BA}^n	\vec{a}_{BA}^t
$\parallel \vec{B_0B}$	$\perp \vec{B_0B}$	=	$\parallel \vec{A_0A}$	$\parallel \vec{BA}$	$\perp \vec{BA}$
$\omega_4^2 \cdot B_0B$?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0A$	$\omega_3^2 \cdot BA$?



Utilizzando un'opportuna scala delle velocità si ottengono i seguenti valori:

$$|\overrightarrow{a_{BA}^n}| = 169.74 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_{BA}^t}| = 129.83 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_B^n}| = 81.40 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_B^t}| = 409.30 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_B}| = 385.17 \text{ m/s}^2$$

Per calcolare l'accelerazione angolare α_3 della biella, si fa riferimento alla definizione della componente tangenziale dell'accelerazione del punto B rispetto il punto A:

$$\overrightarrow{a_{BA}^t} = \overrightarrow{\alpha_3} \times \overrightarrow{AB}$$

$$|\overrightarrow{\alpha_3}| = \frac{a_{BA}^t}{AB} = 259.65 \text{ rad/s}^2$$

Analogamente si calcola α_4 :

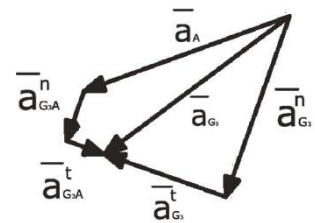
$$\overrightarrow{a_B^t} = \overrightarrow{\alpha_4} \times \overrightarrow{B_0B}$$

$$|\overrightarrow{\alpha_4}| = \frac{a_B^t}{B_0} = 584.71 \text{ rad/s}^2$$

Si calcola ora l'accelerazione del punto di mezzeria della biella mediante la formula:

$$\overrightarrow{a_{G3}} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{G3A}} = \overrightarrow{a_A^n} + \overrightarrow{a_{G3A}^n} + \overrightarrow{a_{G3A}^t}$$

$\overrightarrow{a_{G3}^n}$	$\overrightarrow{a_{G3}^t}$	=	$\overrightarrow{a_A^n}$	$\overrightarrow{a_{G3A}^n}$	$\overrightarrow{a_{G3A}^t}$
$\parallel \overrightarrow{AG_3}$	$\perp \overrightarrow{AG_3}$	=	$\parallel \overrightarrow{A_0A}$	$\parallel \overrightarrow{AG_3}$	$\perp \overrightarrow{AG_3}$
?	?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0A$	$\omega_3^2 \cdot AG_3$	$\alpha_3 \cdot AG_3$



Utilizzando un'opportuna scala delle velocità si ottengono i seguenti valori:

$$|\overrightarrow{a_{G3}^n}| = 307.84 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_{G3}^t}| = 206.06 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_{G3A}^n}| = 84.87 \text{ m/s}^2$$

$$|\overrightarrow{a_{G3A}^t}| = 64.91 \text{ m/s}^2$$

Ora si calcola l'accelerazione del punto di mezzeria del bilanciere attraverso la seguente formula:

$$\vec{a}_{G_4} = -\omega_4^2 \vec{B_0G_4} + \alpha_4 \times \vec{B_0G_4}$$

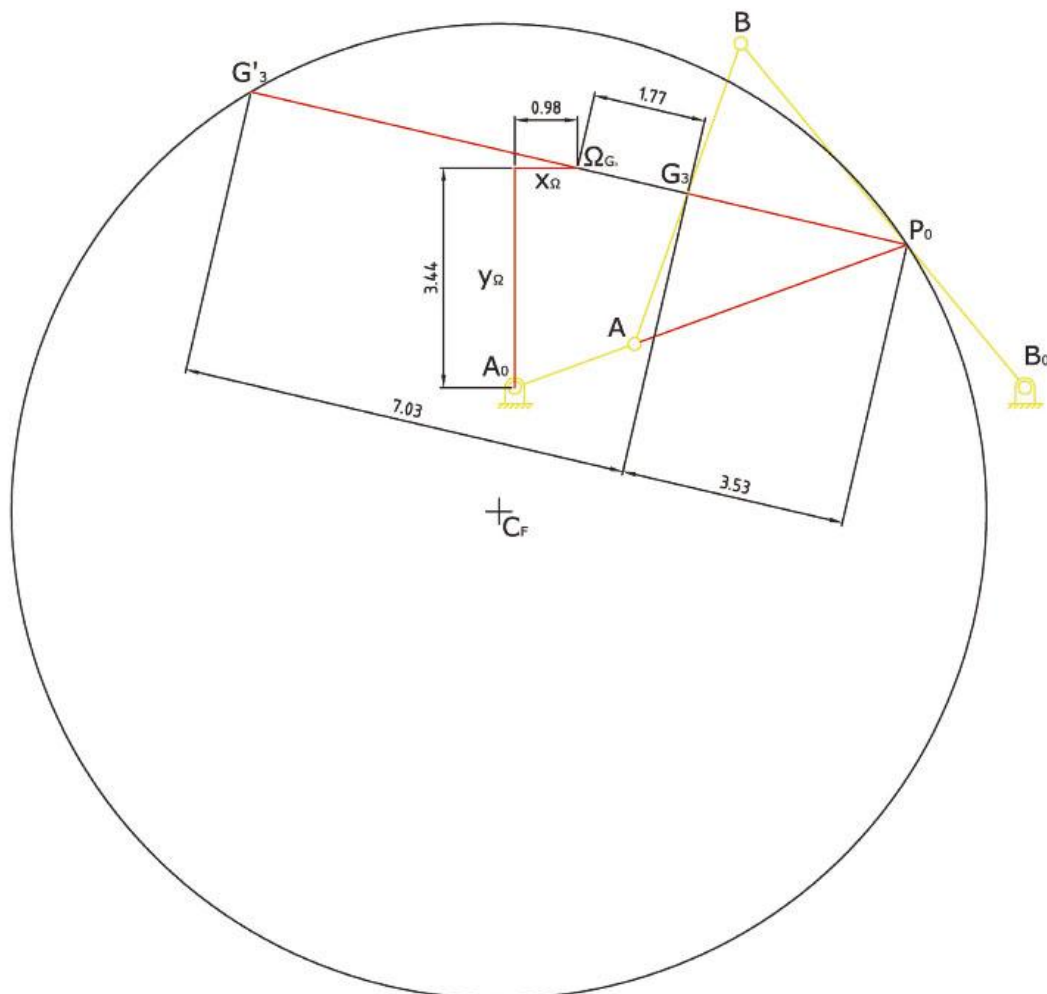
$$|\vec{a}_{G_4}| = 40.7 \text{ m/s}^2$$

Per determinare il centro di curvatura della traiettoria del punto di mezzeria della biella, si impiega la formula di Euler – Savary :

$$\vec{P_0G_3} = \vec{\Omega G_3} \cdot \vec{G_3G_3}$$

Dove il punto G'_3 è il punto di intersezione tra la retta passante per P_0G_3 e la circonferenza dei flessi. Per definire tale circonferenza si hanno le seguenti tre condizioni:

- La circonferenza dei flessi passa per il punto P_0
- La circonferenza dei flessi passa per il punto B' tale che sia: $\vec{P_0B} = \vec{B_0B} \cdot \vec{B'B}$
- La circonferenza dei flessi passa per il punto A' tale che sia: $\vec{P_0A} = \vec{A_0A} \cdot \vec{A'A}$



Una volta definita la circonferenza dei flessi è possibile determinare il centro di curvatura della traiettoria della mezzeria della biella:

$$|\overrightarrow{\Omega G_3}| = 0.18 \text{ m}$$

$$\rho_x = 0.01 \text{ m}$$

$$\rho_y = 0.34 \text{ m}$$

Esercitazione N.11

Metodi di analisi cinematica mediante equazioni di vincolo.

Con riferimento al quadrilatero $OABC$ di cui alla esercitazione precedente, caratterizzato dalla velocità angolare (costante) della manovella $\omega_2 = 400$ giri/minuto, calcolare, in corrispondenza dell'anomalia della manovella $\vartheta_2 = 20^\circ$ (misurata a partire dalla posizione di sovrapposizione della manovella rispetto al telaio):

- le velocità e le accelerazioni angolari delle aste;
- le velocità e le accelerazioni delle mezzerie delle aste,

mediante il metodo delle equazioni di vincolo, scegliendo a piacere le coordinate lagrangiane (i 3 angoli delle aste ovvero le coordinate naturali).

Verificare il calcolo effettuato con i risultati ottenuti nella precedente esercitazione ove si era applicato il metodo dei diagrammi polari ed il metodo analitico esatto.

Introduzione

Il metodo delle equazioni di vincolo è un metodo generale di analisi cinematica facilmente implementabile al calcolatore: la procedura risolutiva infatti non varia da caso a caso, ciò che cambiano sono le equazioni di vincolo e le coordinate scelte.

La prima operazione per utilizzare questo metodo consiste nell'assegnare n variabili lagrangiane q_i , dove delle n variabili le $x_i=1...n$ rappresentano le variabili indipendenti corrispondenti ai membri moventi (input), essendo f il numero dei gradi di libertà del sistema, e dove le $y_i=1...m$ rappresentano le variabili dipendenti corrispondenti ai membri cedenti, essendo $n = m + f$.

Tali coordinate sono legate tra loro da equazioni di vincolo del tipo:

$$q = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{bmatrix} \quad \psi = \begin{cases} \psi_1(y_1 \dots y_m, x_1 \dots x_f) = 0 \\ \vdots \\ \psi_m(y_1 \dots y_m, x_1 \dots x_f) = 0 \end{cases}$$

Definito tale sistema di equazioni, si procede al calcolo della matrice jacobiana delle equazioni di vincolo. In questo modo, sarà più agevole eseguire le operazioni di derivazione.

La matrice jacobiana, in particolare, è così definita:

$$[\psi_q] = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Tale matrice si può partizionare raggruppando le variabili indipendenti x e quelle dipendenti y :

$$[\psi_q] = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Definite queste matrici si può passare all'analisi delle configurazioni possibili risolvendo il sistema delle equazioni di vincolo:

$$[\psi(y, x)] = [0]$$

L'analisi della configurazione può effettuarsi, in generale, per qualsiasi sistema, usando metodi numerici iterativi quali, ad esempio il metodo di Newton Raphson, che si basa sulla seguente formula:

$$[y]^{i+1} = [y]^i - [\psi_y]^{-1} \cdot [\psi]^i$$

Iterando questo calcolo fino ad ottenere una tolleranza desiderata, otteniamo le possibili configurazioni che può assumere il meccanismo in funzione delle variabili indipendenti.

A questo punto derivando le equazioni di vincolo si ottiene la seguente relazione che consente di determinare le velocità dei punti di interesse:

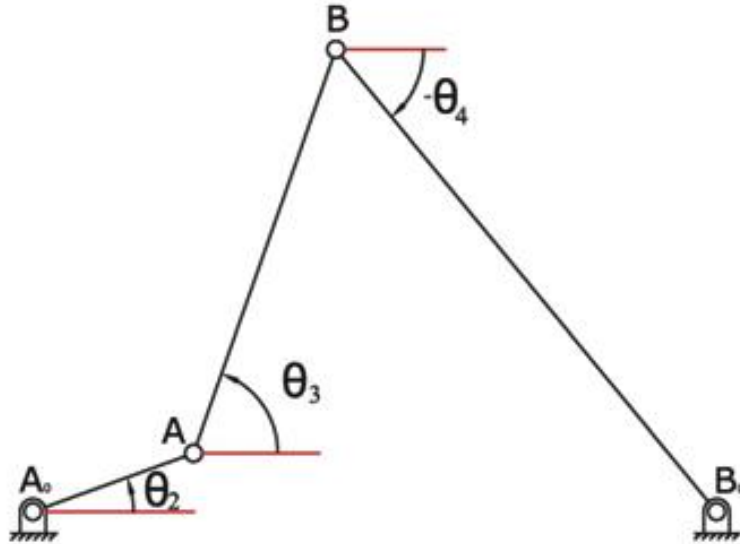
$$[\dot{y}] = -[\psi_y]^{-1} \cdot [\psi_x] \cdot [\dot{x}]$$

Infine, note anche le velocità, si procede al calcolo delle accelerazioni derivando la formula precedente ottenendo:

$$[\ddot{y}] = -[\psi_y]^{-1} \cdot [\psi_x] \cdot [\ddot{x}] - [\psi_y]^{-1} \cdot \left(\left(\left([\psi_y] \cdot [\dot{y}] \right)_y \cdot [\dot{y}] \right) + \left(\left([\psi_x] \cdot [\dot{x}] \right)_x \cdot [\dot{x}] \right) \right)$$

Metodo delle equazioni di vincolo

Si effettua ora l'analisi cinematica del quadrilatero articolato in figura mediante le equazioni di vincolo.



Le coordinate lagrangiane impiegate sono le seguenti:

$$[q] = \begin{bmatrix} \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

Di cui le variabili indipendenti x_i e dipendenti y_i sono:

$$[x] = [\vartheta_2] \quad [y] = \begin{bmatrix} \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{bmatrix}$$

dove ϑ_2 è l'anomalia della manovella.

Le equazioni di vincolo in questo caso saranno le seguenti:

$$\Psi_1: r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 - r_1 = 0$$

$$\Psi_2: r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 + r_4 \sin \theta_4 = 0$$

Dalle relazioni precedenti si deduce che il sistema avrà 1 grado di libertà essendo $f = n - m = 3 - 2 = 1$.

Definiti tali parametri si procede come spiegato nell'introduzione, calcolando prima la matrice jacobiana delle equazioni di vincolo:

$$[\Psi_q] = \begin{bmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & -r_4 \sin \theta_4 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 & r_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

essendo rispettivamente:

$$[\Psi_y] = \begin{bmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & -r_4 \sin \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix}$$

$$[\Psi_x] = \begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

Risolvendo per via numerica il sistema delle equazioni di vincolo ed utilizzando come valori iniziali i seguenti dati:

$$[q] = \begin{bmatrix} \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.349 \\ 1.22 \\ -0.87 \end{bmatrix}$$

si ottengono i valori per le posizioni:

$$[y] = \begin{bmatrix} \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.23 \\ -0.88 \end{bmatrix}$$

Definito il vettore delle posizioni $[y]$ si determinano le velocità angolari ω_3 ed ω_4 :

$$[\dot{y}] = \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.42 \\ -10.78 \end{bmatrix}$$

Infine si calcolano le accelerazioni angolari α_3 ed α_4 :

$$[\ddot{y}] = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -259.65 \\ 584.71 \end{bmatrix}$$

Definite le velocità angolari ω e le posizioni ϑ si calcolano le velocità e le accelerazioni delle mezzerie delle aste:

$$[v_{G2}] = 4.18879 \text{ m/s}$$

$$[v_{G3}] = 6.50865 \text{ m/s}$$

$$[v_{G4}] = 3.77417 \text{ m/s}$$

$$[a_{G2}] = 175.459 \text{ m/s}^2$$

$$[a_{G3}] = 370.445 \text{ m/s}^2$$

$$[a_{G4}] = 208.656 \text{ m/s}^2$$

Esercitazione N.12

Geometria delle ruote dentate.

Disegnare una coppia di ruote dentate con profili ad evolvente che risponda ai seguenti dati:

- 1) interasse $i = 300$ mm;
- 2) rapporto di trasmissione $\tau = 0.5$;
- 3) angolo caratteristico $\vartheta = 22^\circ$;
- 4) modulo $m = 10$ mm;
- 5) numero di giri al 1' della ruota conduttrice (di raggio minore) $n_1 = 150$.

Determinare:

- a) gli elementi geometrici della dentatura;
- b) la lunghezza della linea di ingranamento, dell'arco di accesso, di recesso e di azione e verificare la continuità del moto;
- c) la velocità di strisciamento nei punti di accesso e recesso.

a) Elementi geometrici della dentatura

Assegnata la lunghezza dell'interasse i ed il rapporto di trasmissione τ , si possono ricavare i raggi delle primitive del moto attraverso le seguenti relazioni:

$$r_2 = \frac{i}{i + \tau} = \frac{300}{1 + 0,5} = 200 \text{ mm} \quad (\text{ruota condotta})$$

$$r_1 = \frac{i}{i + \tau} \cdot \tau = \frac{300}{1 + 0,5} \cdot 0,5 = 100 \text{ mm} \quad (\text{ruota conduttrice})$$

A partire dai raggi r_1 ed r_2 si ricavano i raggi delle circonferenze di troncatura esterna ed interna di ciascuna primitiva:

Ruota conduttrice

$$r_{te1} = r_1 + a = 100 + 10 = 110 \text{ mm}$$

$$r_{ti1} = r_1 - b = 100 - 12,5 = 87,5 \text{ mm}$$

Ruota condotta

$$r_{te2} = r_2 + a = 200 + 10 = 210 \text{ mm}$$

$$r_{ti2} = r_2 - b = 200 - 12,5 = 187,5 \text{ mm}$$

Avendo posto per un ingranaggio modulare:

$$a = m = 10 \text{ mm} \quad (\text{addendum})$$

$$b = \frac{5}{4}m = 12,5 \text{ mm} \quad (\text{dedendum})$$

Tra la circonferenza di troncatura esterna di una ruota e quella interna dell'altra vi è perciò un gioco δ pari a:

$$\delta = b - a = \frac{m}{4} = 2,5 \text{ mm}$$

In tale spazio i profili non vengono a contatto e si raccordano le rispettive circonferenze di troncatura interna secondo archi di circonferenza di raggio ρ pari al suddetto gioco δ .

L'altezza dei denti h può allora essere così calcolata:

$$h = a + b = 22,5 \text{ mm}$$

Essendo m definito come il rapporto tra il diametro della primitiva ed il corrispondente numero dei denti, possiamo calcolare il numero dei denti della ruota condotta e conduttrice.

$$z_1 = \frac{2r_1}{m} = \frac{200}{10} = 20 \qquad z_2 = \frac{2r_2}{m} = \frac{400}{10} = 40$$

Infine determiniamo il passo circonferenziale p , definito come la lunghezza dell'arco di primitiva compreso tra due profili identici di due denti consecutivi:

$$p = \frac{2\pi r_1}{z_1} = \frac{2\pi r_2}{z_2} = 31,42 \text{ mm}$$

b) Lunghezza della linea di ingranamento, dell'arco di azione e verifica della continuità del moto

Per le ruote ad evolvente la linea di ingranamento è definita dal segmento della retta d'azione avente per estremi i punti di intersezione della retta stessa con le circonferenze di troncatura esterna.

Può essere così determinata:

Lunghezza della linea di ingranamento di accesso

$$\eta_1 = P_0M_1 = \frac{m}{2} \left(\sqrt{z_2^2 \text{sen}^2 \vartheta + 4z_2 + 4} - z_2 \text{sen} \vartheta \right) = 23,64 \text{ mm}$$

Lunghezza della linea di ingranamento di recesso

$$\eta_2 = P_0M_2 = \frac{m}{2} \left(\sqrt{z_1^2 \text{sen}^2 \vartheta + 4z_1 + 4} - z_1 \text{sen} \vartheta \right) = 21,73 \text{ mm}$$

L'arco d'azione, definito come l'arco di primitiva che si svolge durante il contatto tra due denti, può essere così calcolato:

Lunghezza dell'arco d'azione di accesso

$$\widehat{P_0N_1} = \frac{P_0M_1}{\cos \vartheta} = \frac{23,64}{\cos(22^\circ)} = 25,5 \text{ mm}$$

Lunghezza dell'arco d'azione di recesso

$$\widehat{P_0N_2} = \frac{P_0M_2}{\cos \vartheta} = \frac{21,73}{\cos(22^\circ)} = 23,4 \text{ mm}$$

Lunghezza totale dell'arco d'azione

$$e = \widehat{P_0N_1} + \widehat{P_0N_2} = 25,5 + 23,5 = 48,9 \text{ mm}$$

Perché sia assicurata la continuità della trasmissione è necessario che, prima che in una coppia di denti avvenga il distacco, la coppia di denti successiva abbia già iniziato il contatto e quindi, poiché

l'arco di primitiva compreso tra due profili successivi è uguale al passo, perché si abbia continuità del moto la lunghezza dell'arco di azione deve essere maggiore del passo $p > e$.

Detto fattore di ricoprimento f il rapporto tra la lunghezza dell'arco d'azione ed il passo, tale rapporto per garantire la continuità della trasmissione deve risultare sempre maggiore di uno:

$$f = \frac{e}{p} > 1$$

Nel caso in esame abbiamo:

$$f = \frac{e}{p} = \frac{48,9}{31,4} = 1,56 > 1$$

La continuità del moto è verificata.

c) Velocità di strisciamento nei punti di accesso e recesso

Poiché nelle ruote dentate in esame il moto relativo è un moto piano, la velocità di strisciamento v_s può essere così calcolata:

$$v_s = \omega_r \cdot P_0M$$

dove ω_r è il modulo della velocità angolare relativa dato da $\omega_r = \omega_1 - \omega_2$

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi \cdot 150}{60} = 15,7 \text{ rad/s}$$

Essendo:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

si ricava:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \tau = 15,7 \cdot 0,5 = 7,85 \text{ rad/s}$$

Velocità di strisciamento nei punti di accesso

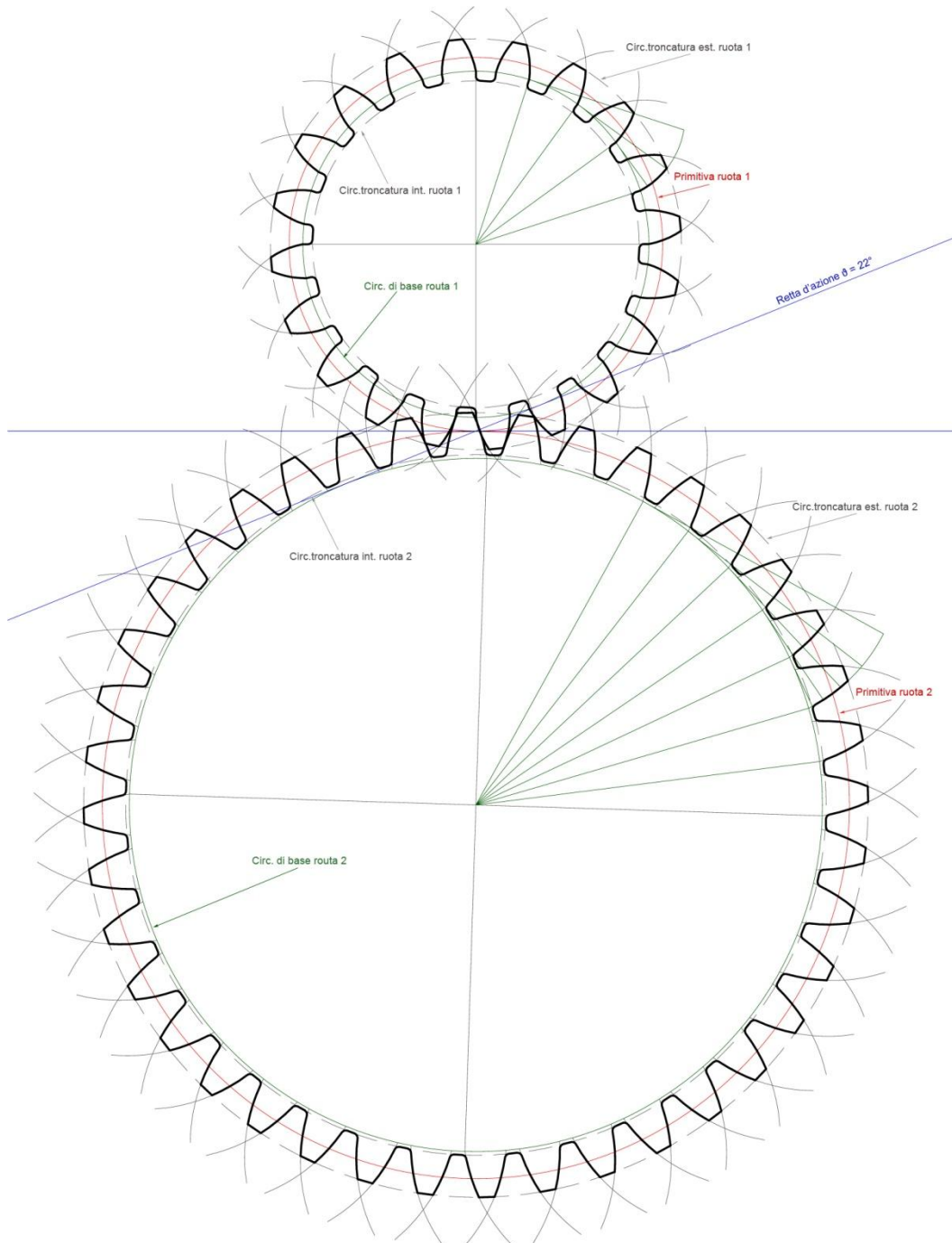
$$v_s = \omega_r \cdot P_0M_1 = 7,85 \cdot 23,64 \cdot 10^{-3} = 0,186 \text{ m/s}$$

Velocità di strisciamento nei punti di recesso

$$v_s = \omega_r \cdot P_0M_2 = 7,85 \cdot 21,73 \cdot 10^{-3} = 0,171 \text{ m/s}$$

d) Disegno delle ruote dentate

Scala 1:4



Esercitazione N.13

Analisi dinamica. Problema dinamico inverso.

DINAMICA CAMMA A RULLO

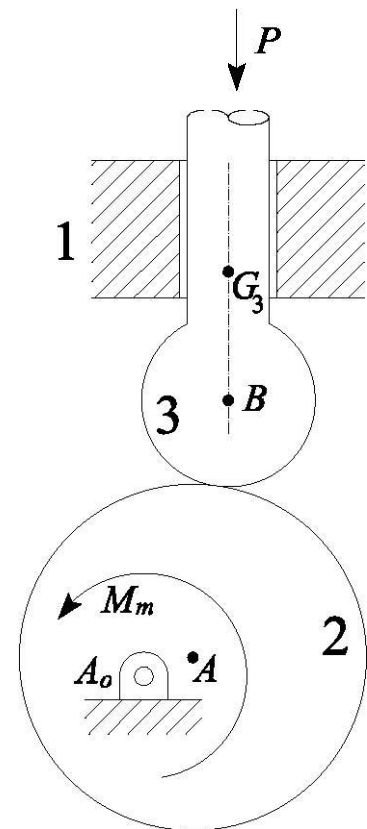
Il meccanismo a camma rappresentato in scala nella figura affianco, sia costituito dal disco eccentrico 2, incernierato in A_0 , avente:

- centro geometrico in A , coincidente col baricentro G_2 ,
- raggio $r = 10$ cm,
- massa $m_2 = 2.2$ kg,

e dal cedente traslante 3, avente:

- baricentro in G_3
- $m_3 = 1.9$ kg.

Dedotte tutte le caratteristiche geometriche dalla figura ed ipotizzando l'assenza di attrito, si calcoli, mediante il metodo del *free body*, la coppia motrice ideale necessaria, nella configurazione rappresentata, a mantenere la velocità angolare ω_2 (costante) pari a 50 giri/1', tenendo conto delle forze peso dei due membri mobili e di una forza di chiusura (supposta costante) $P = 50$ N agente lungo l'asse di traslazione. Si determinino altresì le reazioni vincolari ideali R_{12} , R_{13} ed R_{23} .



Si ripeta il calcolo del momento motore applicando il principio dei lavori virtuali.

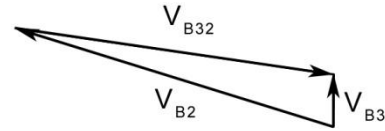
Infine, nella configurazione di massima alzata del cedente, si deduca la forza minima P (eventualmente nulla) per evitare, in quella configurazione ed alla velocità angolare costante di 350 giri/1', la perdita di contatto tra cedente ed eccentrico.

Studio cinematico

Attraverso il teorema dei moti relativi si ottiene:

$$\vec{v}_{B3} = \vec{v}_{B2} + \vec{v}_{B3,2}$$

\vec{v}_{B3}	=	\vec{v}_{B2}	$\vec{v}_{B3,2}$
$\parallel \vec{BG}_3$	=	$\perp \vec{A_0B}$	$\perp \vec{AB}$
?	=	$\omega_2 \cdot A_0B$?



Utilizzando un opportuna scala per le velocità si ricava attraverso il metodo dei diagrammi polari:

$$\omega_2 = \frac{2\pi n}{60} = 5.24 \text{ rad/s}$$

$$\vec{v}_{B3} = 0.14 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{B2} = 0.88 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{B3,2} = 0.85 \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_{B3} = \vec{a}_{B2} + \vec{a}_{B3,2}^n + \vec{a}_{B3,2}^t + \vec{a}_c$$

\vec{a}_{B3}	=	\vec{a}_{B2}	$\vec{a}_{B3,2}^n$	$\vec{a}_{B3,2}^t$	\vec{a}_c
$\parallel \vec{BG}_3$	=	$\parallel \vec{A_0B}$	$\parallel \vec{AB}$	$\perp \vec{AB}$	$\parallel \vec{AB}$
?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0B$	$v_{B3,2}^2 / AB$?	$2\omega_2 v_{B3,2}$

Utilizzando un opportuna scala per le accelerazioni si ricava attraverso il metodo dei diagrammi polari:

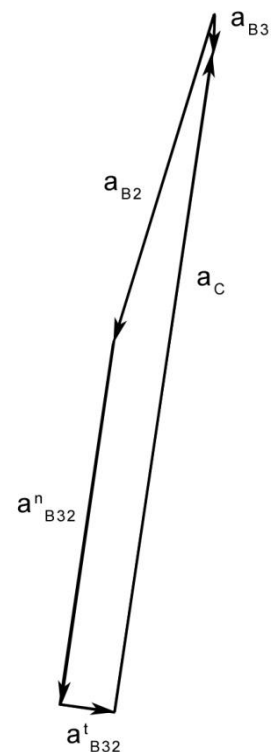
$$\vec{a}_{B3} = 0.45 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{B2} = 4.58 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{B3,2}^n = 4.82 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{B3,2}^t = 0.73 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_c = 8.91 \text{ m/s}^2$$



Free body

Attraverso i seguenti schemi del free body sono valide se seguenti equazioni di equilibrio dinamico:

Corpo 3

$$\sum \vec{F} = m_3 \vec{a}_{G3}$$

$$\vec{P} + \vec{P}_3 + \vec{R}_{13} + \vec{R}_{23} + \vec{F}_3^{in} = 0$$

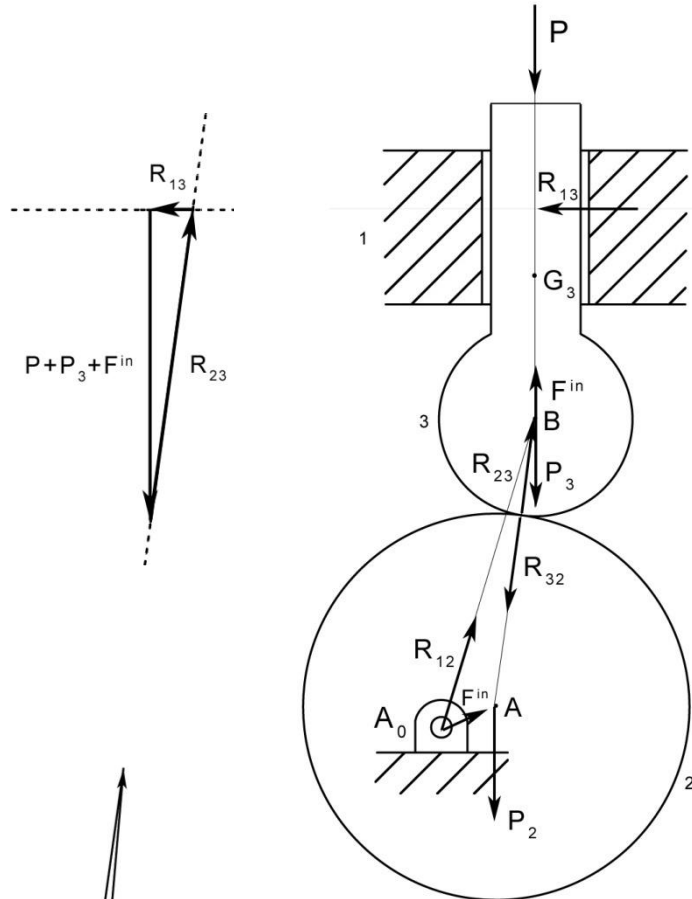
$$P = 50 \text{ N}$$

$$P_3 = 18.6 \text{ N}$$

$$R_{13} = 9.4 \text{ N}$$

$$R_{23} = 68.4 \text{ N}$$

$$F_3^{in} = 0.86 \text{ N}$$

Corpo 2

$$\sum \vec{F} = m_2 \vec{a}_{G2}$$

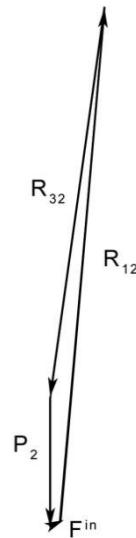
$$\vec{P}_2 + \vec{R}_{12} + \vec{R}_{32} + \vec{F}_2^{in} = 0$$

$$P_2 = 21.6 \text{ N}$$

$$R_{12} = 89 \text{ N}$$

$$R_{32} = 68.4 \text{ N}$$

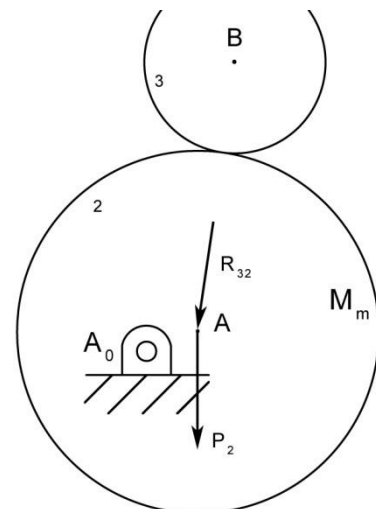
$$F_2^{in} = 1.8 \text{ N}$$

Coppia motrice M_m

$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0$$

$$P_2 d_2 + R_{32} d_{32} - M_m = 0$$

$$M_m = 21.6 \cdot 0.028 + 68.4 \cdot 0.027 = 2.45 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Principio dei lavori virtuali

$$\sum (\vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M} \cdot \vec{\omega} + \vec{F}^{in} \cdot \vec{v} + \vec{M}^{in} \cdot \vec{\omega}) = 0$$

$$Pv_B + P_3v_B + P_2v_{Ay} + M_m\omega_2 + F_2^{in}v_{Ay} + F_3^{in}v_B = 0$$

$$M_m = \frac{Pv_B + P_3v_B + P_2v_{Ay} + F_2^{in}v_{Ay} + F_3^{in}v_B}{\omega_2} =$$

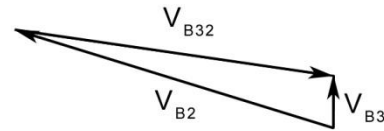
$$= \frac{50 \cdot 0.14 + 18.6 \cdot 0.14 + 21.6 \cdot 0.15 + 0.86 \cdot 0.15 + 1.8 \cdot 0.14}{5.24} = 2.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Configurazione di massima alzata del cedente

Attraverso il teorema dei moti relativi si ottiene:

$$\vec{v}_{B3} = \vec{v}_{B2} + \vec{v}_{B3,2}$$

\vec{v}_{B3}	=	\vec{v}_{B2}	$\vec{v}_{B3,2}$
$\parallel \vec{BG}_3$	=	$\perp \vec{A_0B}$	$\perp \vec{AB}$
?	=	$\omega_2 \cdot A_0B$?



Utilizzando un opportuna scala per le velocità si ricava attraverso il metodo dei diagrammi polari:

$$\omega_2 = \frac{2\pi n}{60} = 36.6 \text{ rad/s}$$

$$\vec{v}_{B3} = 0.98 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{B2} = 6.11 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{B3,2} = 5.87 \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_{B3} = \vec{a}_{B2} + \vec{a}_{B3,2}^n + \vec{a}_{B3,2}^t + \vec{a}_c$$

\vec{a}_{B3}	=	\vec{a}_{B2}	$\vec{a}_{B3,2}^n$	$\vec{a}_{B3,2}^t$	\vec{a}_c
$\parallel \vec{BG}_3$	=	$\parallel \vec{A_0B}$	$\parallel \vec{AB}$	$\perp \vec{AB}$	$\parallel \vec{AB}$
?	=	$\omega_2^2 \cdot A_0B$	$v_{B3,2}^2 / AB$?	$2\omega_2 v_{B3,2}$

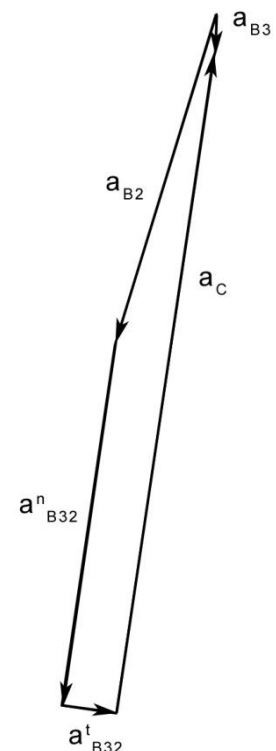
Utilizzando un opportuna scala per le accelerazioni si ricava attraverso il metodo dei diagrammi polari:

$$\vec{a}_{B3} = 20 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{B2} = 200.9 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{B3,2}^n = 229.7 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_c = 429.7 \text{ m/s}^2$$



Per dedurre la forza minima P_{\min} per evitare la perdita di contatto tra cedente ed eccentrico si procede trovando la P alla quale ho il distacco ($R_{23}=0$, $R_{13}=0$).

Corpo 3

$$\sum \vec{F} = m_3 \vec{a}_{G3}$$

$$\vec{P} + \vec{P}_3 + \vec{F}_3^{in} = 0$$

$$P = -P_3 + F_3^{in} = -18.6 + 38 = 19.4 \text{ N}$$

Esercitazione N.14

Analisi dinamica. Problema dinamico diretto.

OSCILLATORE LIBERO SMORZATO

Sia assegnato un oscillatore libero smorzato caratterizzato da un *fattore* di smorzamento $\zeta = 1.5$, massa $m = 5$ kg, e pulsazione naturale $\omega_n = 0.2$ rad/s.

Assumendo le seguenti condizioni al contorno:

$x = 0$ per $t = 0$ (posizione iniziale della massa) $v = 1.5$ cm/s per $t = 0$ (velocità iniziale)

si determini la legge del moto sia analiticamente sia per via numerica e si confrontino i risultati.

PENDOLO COMPOSTO

Un corpo rigido, avente massa $m = 5$ kg e momento d'inerzia baricentrico $I_G = 0.05$ kg m², è incernierato al telaio in un punto A_0 , distante 5 cm dal baricentro G .

Nell'ipotesi che il corpo (pendolo composto) sia soggetto alla sola forza peso, si deduca l'equazione del moto tramite il metodo del *free-body* e la si integri numericamente, a partire dalla condizione di quiete nella configurazione in cui A_0G è ortogonale alla verticale locale.

Determinare altresì i valori delle reazioni, nell'arco di tempo di integrazione prescelto.

Oscillatore libero smorzatoMetodo analitico

Data l'equazione differenziale del moto smorzato:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = 0$$

si perviene a:

$$\dot{x} = -2\zeta\omega_n\dot{x} - \omega_n^2x = 0$$

La prima operazione da compiere è esplicitare la soluzione che per $\zeta > 1$ è espressa dalla seguente relazione:

$$x = e^{-\alpha t}(C_1e^{\beta t} + C_2e^{-\beta t})$$

dove α e β sono posti uguale a:

$$\alpha = \omega_n\zeta \quad \text{e} \quad \beta = \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Imponendo le condizioni iniziali del moto (per $t = 0$, $x = 0$ ed $\dot{x} = 0.015 \text{ m/s}$) vengono determinate le costanti C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} x(0) = e^{-\alpha t}(C_1e^{\beta t} + C_2e^{-\beta t}) = C_1 + C_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = -e^{-\alpha t}[C_1(\alpha - \beta)e^{\beta t} + C_2(\alpha + \beta)e^{-\beta t}] = -C_1(\alpha - \beta) - C_2(\alpha + \beta) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

da cui:

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\beta} \quad C_2 = -\frac{\dot{x}_0}{2\beta}$$

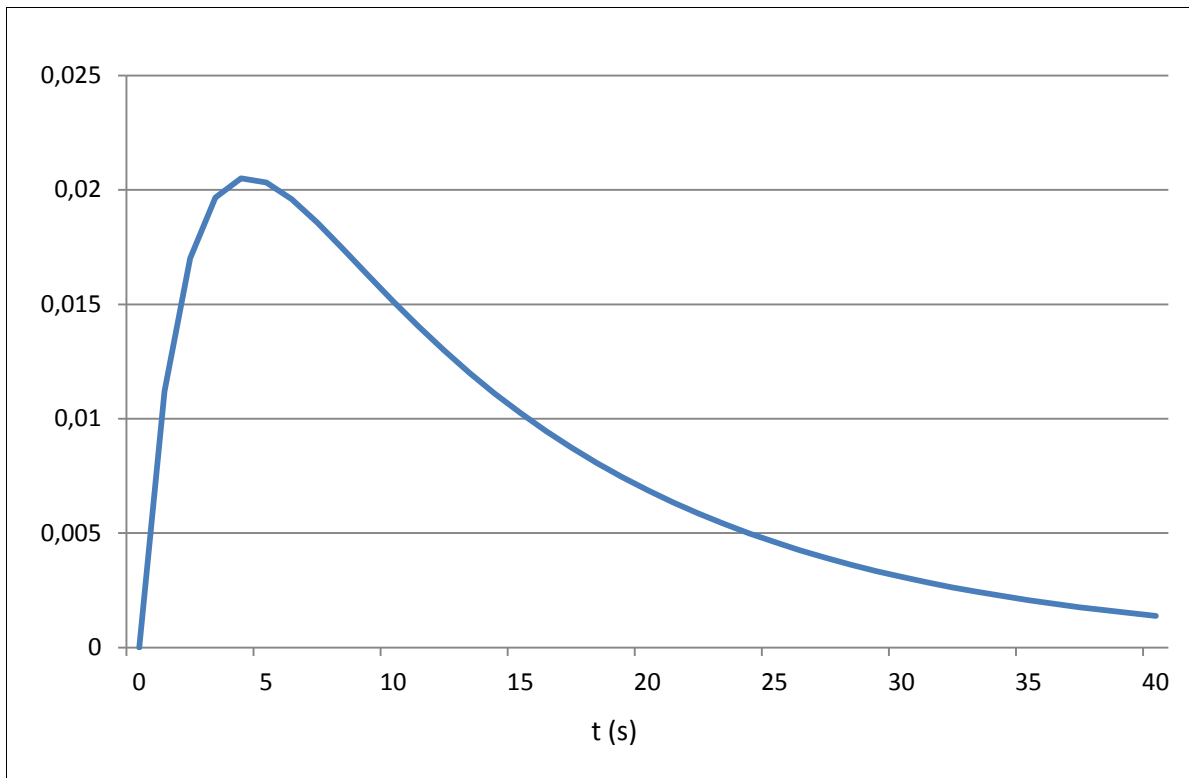
L'equazione del moto diventa allora:

$$x = e^{-\alpha t}(e^{\beta t} - e^{-\beta t})\frac{\dot{x}_0}{2\beta}$$

Sostituendo i relativi valori si ottiene:

$$x = e^{-0.3 t}(e^{0.22 t} - e^{-0.22 t})\frac{0.015}{0.44}$$

Il relativo diagramma è riportato di seguito:



Metodo numerico

Risolvendo tramite un metodo di integrazione numerica l'equazione differenziale del moto:

$$\ddot{x}_i = -2\zeta\omega_n\dot{x}_i - \omega_n^2 x_i$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t$$

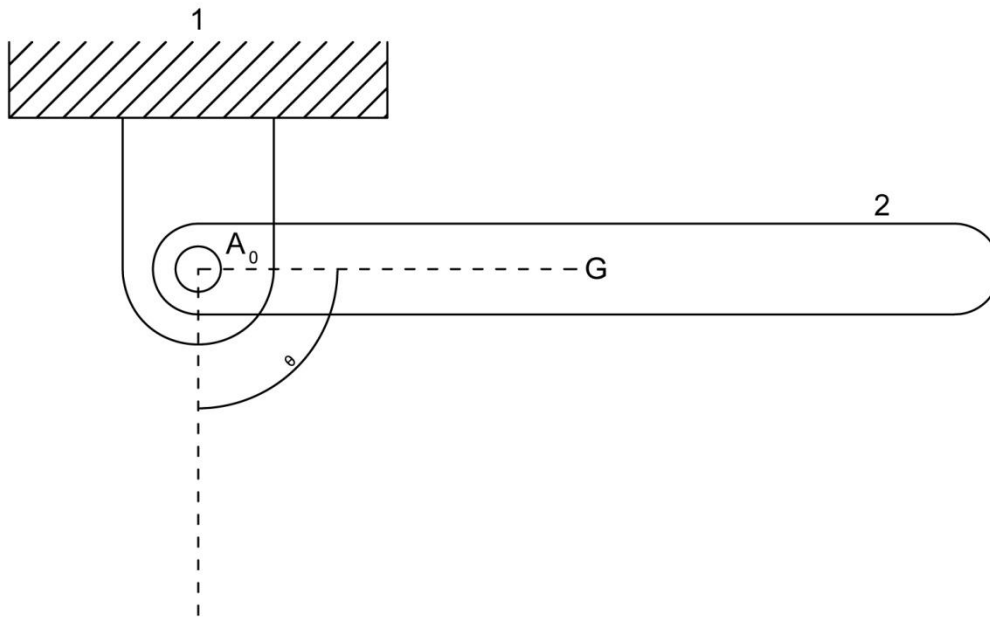
$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t$$

otteniamo i seguenti valori:

Metodo numerico					Metodo analitico		
i	t (s)	x'' (m/s ²)	x' (m/s)	x (m)	t (s)	x (m)	e _r %
0	0,0	-0,009	0,015	0,000	0	0,000	0,000
1	0,5	-0,007	0,011	0,008	1	0,011	0,495
2	1,0	-0,005	0,007	0,013	2	0,017	0,334
3	1,5	-0,004	0,005	0,016	3	0,020	0,203
4	2,0	-0,003	0,003	0,019	4	0,021	0,094
5	2,5	-0,002	0,002	0,020	5	0,020	0,003
6	3,0	-0,001	0,001	0,021	6	0,020	-0,073
7	3,5	-0,001	0,000	0,022	7	0,019	-0,137
8	4,0	-0,001	0,000	0,022	8	0,017	-0,193
9	4,5	0,000	-0,001	0,021	9	0,016	-0,241
10	5,0	0,000	-0,001	0,021	10	0,015	-0,283
11	5,5	0,000	-0,001	0,021	11	0,014	-0,321
12	6,0	0,000	-0,001	0,020	12	0,013	-0,355
13	6,5	0,000	-0,001	0,020	13	0,012	-0,386
14	7,0	0,000	-0,001	0,019	14	0,011	-0,415
15	7,5	0,000	-0,001	0,018	15	0,010	-0,441
16	8,0	0,000	-0,001	0,018	16	0,009	-0,466
17	8,5	0,000	-0,001	0,017	17	0,009	-0,489
18	9,0	0,000	-0,001	0,016	18	0,008	-0,511
19	9,5	0,000	-0,001	0,016	19	0,007	-0,531
20	10,0	0,000	-0,001	0,015	20	0,007	-0,551
21	10,5	0,000	-0,001	0,015	21	0,006	-0,570
22	11,0	0,000	-0,001	0,014	22	0,006	-0,587
23	11,5	0,000	-0,001	0,014	23	0,005	-0,604
24	12,0	0,000	-0,001	0,013	24	0,005	-0,620
25	12,5	0,000	-0,001	0,013	25	0,005	-0,636
26	13,0	0,000	-0,001	0,012	26	0,004	-0,650
27	13,5	0,000	-0,001	0,012	27	0,004	-0,665
28	14,0	0,000	-0,001	0,011	28	0,004	-0,678
29	14,5	0,000	-0,001	0,011	29	0,003	-0,691
30	15,0	0,000	-0,001	0,010	30	0,003	-0,704
31	15,5	0,000	-0,001	0,010	31	0,003	-0,716
32	16,0	0,000	-0,001	0,010	32	0,003	-0,727
33	16,5	0,000	-0,001	0,009	33	0,002	-0,738
34	17,0	0,000	-0,001	0,009	34	0,002	-0,749
35	17,5	0,000	-0,001	0,009	35	0,002	-0,759
36	18,0	0,000	-0,001	0,008	36	0,002	-0,769
37	18,5	0,000	-0,001	0,008	37	0,002	-0,778
38	19,0	0,000	-0,001	0,008	38	0,002	-0,787
39	19,5	0,000	-0,001	0,007	39	0,002	-0,795
40	20,0	0,000	-0,001	0,007	40	0,001	-0,804

Pendolo composto

Lo schema del pendolo composto in esame è riportato nella figura seguente.



La posizione del corpo in esame è individuata dall'angolo $\theta(t)$ di inclinazione dell'asse della verga misurata in senso anti orario a partire dalla verticale, con verso concorde con l'accelerazione di gravità.

La posizione del baricentro G del corpo è identificata da un vettore nel piano avente le seguenti coordinate:

$$x = r \operatorname{sen}\theta$$

$$y = -r \operatorname{cos}\theta$$

dove la distanza A_0G è stata posta uguale ad r .

Derivando rispetto al tempo le funzioni della posizione di G si ottengono le componenti della velocità del baricentro:

$$\dot{x} = r \dot{\theta} \operatorname{cos}\theta$$

$$\dot{y} = r \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta$$

Analogamente derivando rispetto al tempo le componenti della velocità del baricentro si ottengono le componenti dell'accelerazione di G :

$$\ddot{x} = r \ddot{\theta} \operatorname{cos}\theta - \dot{\theta}^2 r \operatorname{sen}\theta$$

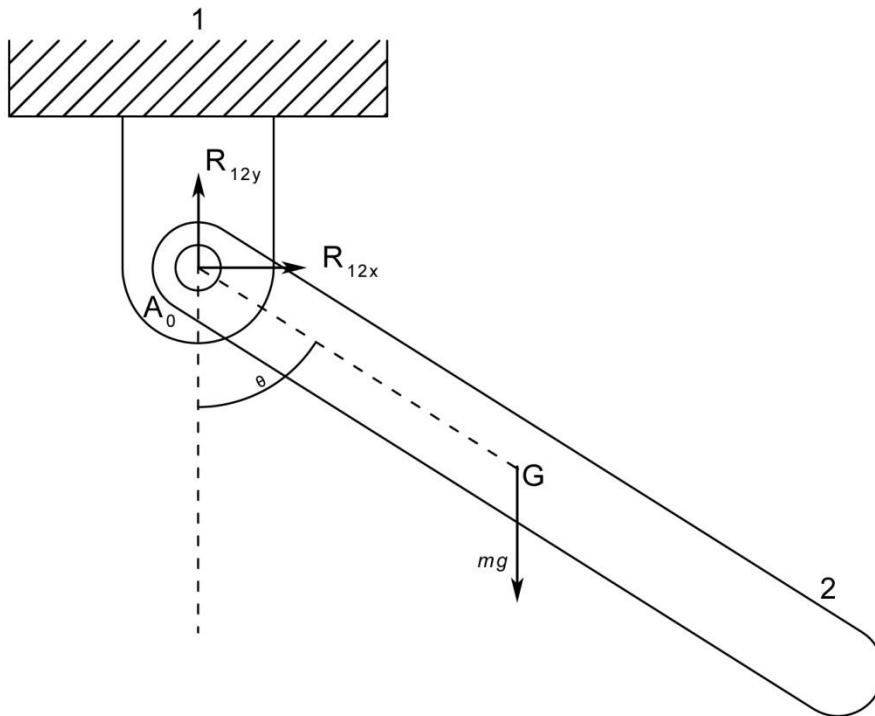
$$\ddot{y} = r \ddot{\theta} \operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2 r \operatorname{cos}\theta$$

Per un corpo nel piano si possono scrivere le seguenti tre equazioni della dinamica: le prime due relative al bilancio delle forze lungo le componenti x ed y, la terza riferita al bilancio del momenti rispetto al baricentro G.

$$1) R_{12x} = m\ddot{x}$$

$$2) R_{12y} - mg = m\ddot{y}$$

$$3) R_{12y}r \operatorname{sen}\theta - R_{12x}r \operatorname{cos}\theta = I_G\ddot{\theta}$$



Questo sistema di tre equazioni si può risolvere discretizzando il tempo in intervalli di una durata costante pari a $\Delta t = 0.01 \text{ s}$.

Per impostare le equazioni si introducono i valori dei tre angoli $(\theta_i, \theta_{i+1}, \theta_{i+2})$ che si susseguono in corrispondenza dei primi tre istanti di tempo:

$$\theta = \theta_i \quad \dot{\theta} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta t} \quad \ddot{\theta} = \frac{\theta_{i+2} + \theta_i - 2\theta_{i+1}}{\Delta t^2}$$

Riscrivendo le equazioni si ha un sistema algebrico nelle tre variabili R_{12x} , R_{12y} e θ_{i+2} :

$$1) R_{12x} = m\ddot{x} = m \left[-\frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)^2 r \operatorname{sen}\theta_i}{\Delta t^2} + \frac{(\theta_{i+2} + \theta_i - 2\theta_{i+1}) r \operatorname{cos}\theta_i}{\Delta t^2} \right]$$

$$2) R_{12y} = mg + m\ddot{y} = mg + m \left[\frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)^2 r \operatorname{cos}\theta_i}{\Delta t^2} + \frac{(\theta_{i+2} + \theta_i - 2\theta_{i+1}) r \operatorname{sen}\theta_i}{\Delta t^2} \right]$$

$$3) R_{12y}r \operatorname{sen}\theta - R_{12x}r \operatorname{cos}\theta = I_G\ddot{\theta} = I_G \frac{\theta_{i+2} + \theta_i - 2\theta_{i+1}}{\Delta t^2}$$

Dante per noti gli angoli ai primi due istanti di tempo (θ_i, θ_{i+1}) si ha:

$$\theta_{i+2} = - \frac{m r \operatorname{sen} \theta_i g \Delta t^2 - 2I_G \theta_{i+1} + I_G \theta_i - 2 r^2 m \theta_{i+1} + r^2 m \theta_i}{I_G + r^2 m}$$

Procedendo per successive iterazioni si perviene ai valori delle reazioni nei vari istanti t_i .

Iterando nuovamente per via numerica si ricavano anche i valori $\dot{\theta}_i$ e $\ddot{\theta}_i$:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta t} \quad \ddot{\theta}_i = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_i}{\Delta t}$$

Assegnando ora i seguenti valori numerici:

$$I_G = 0.05 \text{ kg m}^2$$

$$m = 5 \text{ kg}$$

$$r = 0.05 \text{ m}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ s}$$

si ottiene:

i	t (s)	θ (rad)	θ' (rad/s)	θ'' (rad/s ²)	R_{12x} (N)	R_{12y} (N)
0	0,00	1,571	-2,200	-39,240	-1,208	39,240
1	0,01	1,549	-2,592	-39,231	-1,893	39,208
2	0,02	1,523	-2,985	-39,195	-2,692	39,156
3	0,03	1,493	-3,377	-39,122	-3,600	39,078
4	0,04	1,459	-3,768	-38,997	-4,610	38,967
5	0,05	1,422	-4,158	-38,805	-5,714	38,815
6	0,06	1,380	-4,546	-38,529	-6,898	38,613
7	0,07	1,335	-4,931	-38,152	-8,141	38,355
8	0,08	1,285	-5,313	-37,653	-9,421	38,031
9	0,09	1,232	-5,689	-37,013	-10,705	37,635
10	0,10	1,175	-6,059	-36,213	-11,958	37,160
11	0,11	1,115	-6,422	-35,231	-13,134	36,603
12	0,12	1,051	-6,774	-34,050	-14,185	35,962
13	0,13	0,983	-7,114	-32,651	-15,056	35,240
14	0,14	0,912	-7,441	-31,022	-15,692	34,443
15	0,15	0,837	-7,751	-29,149	-16,036	33,582
16	0,16	0,760	-8,043	-27,028	-16,037	32,673
17	0,17	0,679	-8,313	-24,655	-15,650	31,737
18	0,18	0,596	-8,559	-22,035	-14,843	30,801
19	0,19	0,511	-8,780	-19,179	-13,602	29,894
20	0,20	0,423	-8,971	-16,103	-11,929	29,048
21	0,21	0,333	-9,133	-12,832	-9,850	28,297
22	0,22	0,242	-9,261	-9,397	-7,415	27,670
23	0,23	0,149	-9,355	-5,833	-4,695	27,198
24	0,24	0,056	-9,413	-2,183	-1,777	26,902
25	0,25	-0,038	-9,435	1,509	1,233	26,797
26	0,26	-0,133	-9,420	5,196	4,225	26,890
27	0,27	-0,227	-9,368	8,832	7,089	27,176
28	0,28	-0,321	-9,280	12,369	9,721	27,645
29	0,29	-0,413	-9,156	15,767	12,031	28,275

30	0,30	-0,505	-8,998	18,986	13,948	29,038
31	0,31	-0,595	-8,808	21,995	15,426	29,905
32	0,32	-0,683	-8,588	24,769	16,442	30,839
33	0,33	-0,769	-8,341	27,288	16,997	31,808
34	0,34	-0,852	-8,068	29,543	17,112	32,779
35	0,35	-0,933	-7,772	31,528	16,827	33,726
36	0,36	-1,011	-7,457	33,247	16,194	34,623
37	0,37	-1,085	-7,125	34,707	15,273	35,455
38	0,38	-1,157	-6,778	35,922	14,127	36,207
39	0,39	-1,224	-6,418	36,909	12,820	36,874
40	0,40	-1,289	-6,049	37,688	11,410	37,453
41	0,41	-1,349	-5,672	38,279	9,952	37,945
42	0,42	-1,406	-5,290	38,707	8,489	38,356
43	0,43	-1,459	-4,903	38,994	7,062	38,691
44	0,44	-1,508	-4,513	39,162	5,698	38,958
45	0,45	-1,553	-4,121	39,234	4,421	39,167
46	0,46	-1,594	-3,729	39,229	3,247	39,326
47	0,47	-1,631	-3,336	39,168	2,185	39,444
48	0,48	-1,665	-2,945	39,067	1,242	39,530
49	0,49	-1,694	-2,554	38,942	0,420	39,589
50	0,50	-1,720	-2,165	38,806	-0,281	39,630
51	0,51	-1,741	-1,777	38,671	-0,863	39,657
52	0,52	-1,759	-1,390	38,546	-1,330	39,674
53	0,53	-1,773	-1,004	38,440	-1,683	39,686
54	0,54	-1,783	-0,620	38,359	-1,926	39,696
55	0,55	-1,789	-0,236	38,307	-2,062	39,704
56	0,56	-1,792	0,147	38,287	-2,091	39,712
57	0,57	-1,790	0,530	38,300	-2,015	39,720
58	0,58	-1,785	0,913	38,344	-1,833	39,727
59	0,59	-1,776	1,296	38,419	-1,543	39,732
60	0,60	-1,763	1,680	38,519	-1,145	39,732
61	0,61	-1,746	2,065	38,639	-0,633	39,724
62	0,62	-1,725	2,452	38,772	-0,007	39,704
63	0,63	-1,701	2,840	38,909	0,738	39,666
64	0,64	-1,672	3,229	39,038	1,603	39,605
65	0,65	-1,640	3,619	39,146	2,589	39,514
66	0,66	-1,604	4,010	39,218	3,694	39,384
67	0,67	-1,564	4,403	39,239	4,914	39,207
68	0,68	-1,520	4,795	39,189	6,240	38,972
69	0,69	-1,472	5,187	39,048	7,657	38,671
70	0,70	-1,420	5,577	38,795	9,146	38,293
71	0,71	-1,364	5,965	38,406	10,677	37,828
72	0,72	-1,305	6,349	37,857	12,214	37,267
73	0,73	-1,241	6,728	37,126	13,712	36,604
74	0,74	-1,174	7,099	36,188	15,118	35,835
75	0,75	-1,103	7,461	35,020	16,370	34,958
76	0,76	-1,028	7,811	33,603	17,401	33,979
77	0,77	-0,950	8,147	31,920	18,140	32,907
78	0,78	-0,869	8,467	29,956	18,518	31,758
79	0,79	-0,784	8,766	27,706	18,469	30,555
80	0,80	-0,696	9,043	25,167	17,940	29,329
81	0,81	-0,606	9,295	22,345	16,891	28,114
82	0,82	-0,513	9,518	19,255	15,308	26,953
83	0,83	-0,418	9,711	15,918	13,201	25,888
84	0,84	-0,321	9,870	12,366	10,609	24,962
85	0,85	-0,222	9,994	8,636	7,601	24,219
86	0,86	-0,122	10,080	4,774	4,275	23,692

87	0,87	-0,021	10,128	0,830	0,750	23,409
88	0,88	0,080	10,136	-3,141	-2,838	23,385
89	0,89	0,181	10,105	-7,082	-6,349	23,624
90	0,90	0,283	10,034	-10,940	-9,643	24,116
91	0,91	0,383	9,924	-14,659	-12,598	24,840
92	0,92	0,482	9,778	-18,194	-15,112	25,764
93	0,93	0,580	9,596	-21,501	-17,110	26,848
94	0,94	0,676	9,381	-24,547	-18,550	28,047
95	0,95	0,770	9,135	-27,307	-19,422	29,316
96	0,96	0,861	8,862	-29,764	-19,742	30,610
97	0,97	0,950	8,565	-31,910	-19,556	31,890
98	0,98	1,035	8,246	-33,747	-18,923	33,121
99	0,99	1,118	7,908	-35,281	-17,918	34,276
100	1,00	1,197	7,555	-36,528	-16,620	35,336